DIE BEDEUTUNG INTERNALER LERNVORAUSSETZUNGEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT DER SEKUNDARSTUFE AM BEISPIEL AUSGEWÄHLTER LERNEINHEITEN

Ein Beitrag zu lernpsychologischen Implikationen
von Ansätzen zum genetischen Mathematikunterricht

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors der Philosophie
im Fachbereich Erziehungswissenschaft
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

vorgelegt von
HANNS-JOACHIM STRUNCK
aus Mülheim a. d. Ruhr

1983

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Abstract

STRUNCK, HANNS-JOACHIM:

DIE BEDEUTUNG INTERNALER LERNVORAUSSETZUNGEN IM MATHEMATIK-UNTERRICHT DER SEKUNDARSTUFE AM BEISPIEL AUSGEWÄHLTER LERN-EINHEITEN

Die vorliegende Studie weist mit Mitteln der Fehleranalyse exemplarisch am Beispiel zweier Lerneinheiten aus dem Mathematikunterricht der Sekundarstufe den großen Umfang und Einfluß des Vorverständnisses der Schüler auf deren unterrichtlichen Lernerfolg nach. Vor allem im Bereich "Ganze und rationale Zahlen" gelingt es, wenige und relativ verbreitete Präkonzepte der Schüler zu Operationen mit solchen Zahlen zu isolieren, die zu typischen Fehlern führen und besonders den langfristigen Lernerfolg in vielen Fällen wesentlich mindern.

Daneben versucht die Arbeit im theoretischen Teil eine erkenntnistheoretisch fundierte und schülerorientierte Aufarbeitung und Begriffsbestimmung des vor allem in der Mathematikdidaktik gern zitierten genetischen Prinzips auf der Basis der vorhandenen Literatur. Hierbei findet der Aspekt der Sprache besondere Berücksichtigung.

Sie weist im Anschluß daran und im Kontrast zu den Ergebnissen des empirischen Teils die Vernachlässigung des Vorverständnisses in der bisherigen mathematikdidaktischen Literatur zum genetischen Prinzip nach.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538112_0002

DIE BEDEUTUNG INTERNALER LERNVORAUSSETZUNGEN IM MATHEMATIKUNTERRICHT DER SEKUNDARSTUFE AM BEISPIEL AUSGEWÄHLTER LERNEINHEITEN

Ein Beitrag zu lernpsychologischen Implikationen
von Ansätzen zum genetischen Mathematikunterricht

Inauguraldissertation
zur Erlangung des Grades eines Doktors der Philosophie
im Fachbereich Erziehungswissenschaft
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
zu Frankfurt am Main

vorgelegt von
Hanns-Joachim Strunck
aus
Mülheim a.d. Ruhr
1983

1. Gutachter: Prof. Dr. Jürgen Diederich

2. Gutachter: Prof. Dr. Horst Rumpf

Tag der mündlichen Prüfung: 25.1.1983

Inhaltsverzeichnis

0. Einführung S. 1

1. Die Fragestellung der Arbeit S. 5

2. Zum genetischen Prinzip

2.1. Zur Geschichte des genetischen Prinzips S. 10

2.2. Begriffsanalyse S. 20

2.3. Eigene Begriffsbestimmung S. 36

3. Zur Rolle der internalen Lernvoraussetzungen im genetischen Mathematikunterricht S. 44

4. Empirische Studie zur Diagnose internaler Lernvoraussetzungen und ihrem Einfluß im Lernprozeß

4.1. Vorüberlegungen S. 61

4.2. Zur Methode der Fehleranalyse S. 66

4.3. Die Durchführung der Studie S. 70

4.4. Lernzielkataloge und Testbatterien zu den untersuchten Lerneinheiten S. 76

4.4.1. Lernzielkataloge S. 76

4.4.2. Testbatterien S. 80

4.5. Fehlertabellen, Fehleranalysen und Kenntnisprofile

4.5.1. Überblick S. 88

4.5.2. Die Lerneinheit "Ganze und rationale Zahlen" S. 89

4.5.3. Die Lerneinheit "Zuordnungen" S. 101

4.6. Schlußfolgerungen S. 109

4.7. Ausblick S. 118

5. Zusammenfassung S. 120

6. Anmerkungen S. 123

7. Literatur S. 132

Anhang 1. Fehlertabelle zur Vorstudie S. 138

2. Einzelfallstudien zur Lerneinheit "Ganze und rationale Zahlen" und Leistungsentwicklungen zu den beiden untersuchten Lerneinheiten S. 139

0. Einführung

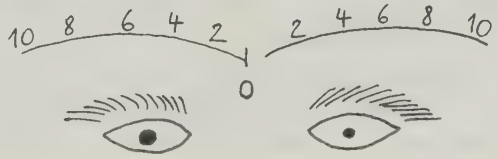
"-3 ist nicht gut.
+3 ist gut."

"Ich stelle mir unter -12 in der Mathematik einen nicht zeigbaren Wert vor."

"-3 ist keine richtige Zahl.
Minus-Zahlen sind nicht "normal"."

"0 in der Mathematik ist der Maßstab, wie in der Physik die optische Achse bei einem Hohlspiegel."

"Bei den negativen Zahlen ist alles genau umgekehrt. Wenn man "Minus" rechnet, kommt man von Null weg und wenn man "Plus" rechnet, kommt man zu 0 hin. Rechnet man weiter und kommt in die positiven Zahlen, dann ist es wie bei den Augenbrauen."



(mündliche Erläuterung: Wenn man mit dem Finger von der Nasenwurzel aus über die Augenbrauen streicht, liegen die Haare in entgegengesetzter Richtung, immer von der Nase weg.)

Dies waren einige schriftliche Schüleräußerungen im Vortest "Ganze und rationale Zahlen", die die Vielfalt der Vor-Einstellungen und Vor-Modelle erahnen lassen.

"Lernen

Studenten, die an der Existenzweise des Habens orientiert sind, hören eine Vorlesung, indem sie auf die Worte hören, ihren logischen Zusammenhang und ihren Sinn erfassen und so vollständig wie möglich alles in ihr Notizbuch aufschreiben, so daß sie sich später ihre Notizen einprägen und eine Prüfung ablegen können. Aber der Inhalt wird nicht

Bestandteil ihrer eigenen Gedankenwelt, er bereichert und erweitert diese nicht. Sie pressen das, was sie hören, in starre Gedankensammlungen oder ganze Theorien, die sie speichern. Inhalt der Vorlesung und Student bleiben einander fremd, außer daß jeder dieser Studenten zum Eigentümer bestimmter, von einem anderen getroffener Feststellungen geworden ist (die dieser entweder selbst geschaffen hat oder aus anderen Quellen schöpfte).

Studenten in der Existenzweise des Habens haben nur ein Ziel: das "Gelernte" festzuhalten, entweder indem sie es ihrem Gedächtnis einprägen oder indem sie ihre Aufzeichnungen sorgsam hüten. Sie brauchen nichts Neues zu schaffen oder hervorzubringen. Der "Habentypus" fühlt sich in der Tat durch neue Ideen oder Gedanken über sein Thema eher beunruhigt, denn das Neue stellt die Summe der Informationen in Frage, die er bereits hat. Für einen Menschen, für den das Haben die Hauptform seiner Bezogenheit zur Welt ist, sind Gedanken, die nicht leicht aufgeschrieben und festgehalten werden können, furchterregend, wie alles, was wächst, sich verändert und somit der Kontrolle entzieht.

Für Studenten, die in der Weise des Seins zur Welt bezogen sind, hat der Lernvorgang eine völlig andere Qualität. Zunächst einmal gehen sie selbst zu der ersten Vorlesung nicht als

tabula rasa.

Sie haben über die Thematik, mit der sich der Vortrag beschäftigt, schon früher nachgedacht; es beschäftigen sie bestimmte Fragen und Probleme. Sie haben sich mit dem Gegenstand schon auseinandergesetzt und sind an ihm interessiert."
(Fromm 1980, S. 38/39)

Fromm beschreibt hier in sehr allgemeinem Zusammenhang zwei Arten von Lernen, die jedem bekannt sind. Da ist auf der einen Seite das "Einpauken", "Eintrichtern" von Wissen, wie es gerne zur - oft kurzfristigen - Erweiterung des Wissens"bestandes" vor Prüfungen, Klassenarbeiten etc. dient. Mit dieser abgespaltenen Abspeicherung von Wissensbeständen ist keine "Genese", d.h. Entwicklung des eigenen Denkens und erst recht nicht der ganzheitlichen Persönlichkeit, also Bildung, verbunden.

Schüler, zumal jüngere, sind jedoch meist vom potentiellen "Seins"-Typus, "Lernen und Sein" fällt für sie noch nicht auseinander, sie kommen niemals als "tabula rasa", sie bringen immer Vorstellungen, Konzepte und Fragen in den Un-

terricht mit. Diese Einsicht ist nicht neu, Klaus Heipcke schreibt dazu auf den Mathematikunterricht bezogen:

"Der Hinweis auf die Tatsache, daß Schüler nicht als "tabula rasa" in den Mathematikunterricht kommen, daß sie vielmehr Vorerfahrungen und Vorwissen mit einbringen, von denen im Unterricht auszugehen ist, hat in der Fachdidaktik zwar Tradition, ist aber dennoch aktuell."
(Heipcke 1977, S. 410)

Aktuell vor allem dadurch, daß trotz dieser "Hinweis-Tradition" bisher z.B. in der Mathematikdidaktik keine empirischen Untersuchungen zu solchen "Vorerfahrungen und Vorwissen" (internalen Lernvoraussetzungen) und deren Auswirkungen auf den Lernprozeß vorliegen. Aber wie soll es gelingen, von "Vorerfahrungen... im Unterricht auszugehen...", die man nicht kennt?

Vielleicht deshalb gehen auch die Vertreter des sogenannten "genetischen Prinzips" in der Mathematikdidaktik recht schnell über das Problem der Vorerfahrungen hinweg, indem sie
-entweder zwar den Anschluß an diese Vorerfahrungen als dringend postulieren, ihn aber nicht konkret verwirklichen (Wittmann; näheres s. Kap.3)
-oder möglichst "voraussetzungslose" Gebiete als zentrale Unterrichtsgegenstände empfehlen (Wagenschein; s.Kap.3).

Es bleibt aber wohl dabei,

"...the most important factor influencing learning is the.. learner's present knowledge."
(Ausubel 1969, S.50/51)

Deshalb versucht die vorliegende Arbeit im empirischen Teil (Kap.4), Vorverständnis exemplarisch in einem begrenzten Bereich von Mathematikunterricht konkret aufzudecken und dessen Einfluß auf die folgenden Lernprozesse nachzuzeichnen und verfolgt damit eine Linie, die nicht nur für die Mathematikdidaktik interessant sein dürfte.

Ein Unterricht sollte nur dann "genetisch" genannt werden, wenn dieses Vorverständnis ermittelt und bewußt zum Ausgangspunkt des Lernprozesses gemacht wird. Unter dieser

Voraussetzung bestehen höhere Chancen, daß der Lernende eine neue Identität mit dem Gelernten findet und bestehen auch Aussichten, daß diese dauerhaft erhalten bleibt. Dann wird Unterricht - nicht nur Mathematikunterricht - wirklich "genetisch", der Lernende entwickelt sich weiter, er gelangt vom vorübergehenden "Haben" zum "Sein".

1. Die Fragestellung der Arbeit

Offensichtlich spielt das genetische Prinzip (genetische Methode) in der erziehungswissenschaftlichen und fachdidaktischen Diskussion als unterrichtliches "Prinzip" wie auch als Unterrichtsmethode speziell auf den Lernebenen Regellernen und problemlösendes Denken eine große Rolle. Es bildete und bildet die Handlungsmaxime vieler Lehrergenerationen, setzt als didaktisches Prinzip den Leitfaden für Stoffauswahl und Stoffanordnung und dient als methodisches Prinzip der Gestaltung bestimmter, oft gegenstandserschließender Unterrichtsphasen. Als didaktisches Prinzip tritt es oft verbunden mit dem exemplarischen Prinzip [1] in Erscheinung, hat als methodisches Prinzip manchmal eine nahe Verwandtschaft zum entdeckenden Lernen [2] und geht sogar bisweilen in einem dieser beiden auf.

Interessant, aber vom lernpsychologischen Aspekt her durchaus verständlich, ist das gehäufte Auftreten des genetischen Prinzips insbesondere in der mathematikdidaktischen Literatur. Im Mathematikunterricht tritt das Vermittlungsproblem zwischen dem ursprünglichen Denken und der Vorstellungswelt der Schüler einerseits und der Fachwissenschaft andererseits mit ihren abstrakten Begriffen bis hin zu entwickelter Axiomatik deutlicher vor Augen als in anderen Unterrichtsfächern, die sich an eine minder formalisierte Wissenschaft anlehnen. Im Bereich der Mathematik wurde außerdem zuerst Kritik in dieser Richtung laut, sie richtete sich gegen das versteinerte und nur für den Experten verständliche erste Mathematiklehrbuch der Geschichte, die "Elemente" des Euklid. Nach der recht genauen Analyse Schubrings (1978) reicht im folgenden die Linie der Verfechter des genetischen Prinzips von Bacon über Mager, Toeplitz und Klein bis Wagenschein und Wittenberg(s.2.1.). Betrachtet man das genetische Prinzip mehr von der lernpsychologischen Seite, so sind wohl auch noch Freudenthal, Papy, Polya und Resnik hinzuzuzählen. Zeitweise zurückgedrängt wurde die Diskussion

um das genetische Prinzip in der Mathematikdidaktik durch die Erneuerungsbestrebungen der "Neuen Mathematik" in den 60er Jahren, die mehr an strukturmathematischen Vorstellungen a la Bourbaki orientiert waren, jedoch keine Lösung des oben genannten Vermittlungsproblems erbrachten. Führende Mathematiker wie Polya, Weyl, Courant und Wittenberg haben deshalb frühzeitig Bedenken gegen eine solche einseitige Reform geäußert.[3)]

In den 60er Jahren haben vor allem Wagenschein und Wittenberg[4)] viel für die Wiederbelebung und Ausgestaltung des genetischen Prinzips im Bereich des Mathematikunterrichts getan.

In letzter Zeit taucht das genetische Prinzip, wenn auch teilweise unter neuem Namen und mit restauriertem Gesicht[5)] wieder auf.

Wie schon oben angedeutet, ist der Begriff "genetisches Prinzip" nur Sammelname für eine Reihe von Begriffen, die sich entweder mehr wissenschaftshistorisch, heuristisch oder gegenstandsbezogen orientieren. Deshalb ist zunächst einmal eine Begriffsbestimmung durch Aufarbeitung der bereits vorhandenen Literatur notwendig (s. 2.1.-2.3.). Hier haben Schubring, Köhnlein und Becker bereits wichtige Vorarbeit geleistet. Ich möchte mich in meiner Arbeit auf das (historisch zu differenzierende) soziale und das individualpsychologische Moment im genetischen Prinzip konzentrieren, indem ich anhand von Literaturbeispielen zum genetischen Prinzip und mit Hilfe von Vortests und Befragungen zu ausgewählten Lerneinheiten des Mathematikcurriculums herausarbeite, welche wesentliche Rolle dem in die jeweilige Lerneinheit eingebrachten Vorverständnis der Schüler zukommt. Das bereits vorhandene Vorverständnis der Schüler zum Untersuchungsgegenstand zu machen, halte ich für einen dringlichen Beitrag zur Konkretisierung des "genetischen Prinzips". Während alle Vertreter des genetischen Prinzips in der Mathematikdidaktik mehr oder weniger von einem Kind Rousseauscher Vorstellung ausgehen, will ich beispielhaft zeigen, daß der

Schüler in jeden schulischen Lernprozeß bereits schulisch und allgemein gesellschaftlich vermittelte Begriffe und Vorstellungen einbringt, die seinen Lernprozeß vorstrukturieren und bei einer echten Genese nicht übergangen werden können.

Damit führe ich die Diskussion aber nicht nur fort, sondern weise zugleich auf einen zentralen Mangel der bisherigen Literatur hin: ausführliche Darstellungen "genetischer Lehrgänge" beziehen sich durchweg auf relativ isolierte und voraussetzungslose Lehrgegenstände, sind also in ihrer Übertragbarkeit auf Lehrgebiete eingeschränkt, die dem Schüler ebenfalls fast fremd oder völlig neu sind. Genau diese Voraussetzung ist aber dann nicht erfullt, wenn der Mathematikunterricht insgesamt lehrgangsartig aufgebaut wird (von außerschulischen Vorerfahrungen der Schüler noch abgesehen). Schließlich haben meine Vorarbeiten zu dem erstaunlichen Befund geführt, daß es empirische Untersuchungen zu solchen "genetischen Lehrgangen" überhaupt nicht gibt.[6)]

Jede Mikroanalyse von Lernprozessen - und diese gehört zum Fundament jeder praxisorientierten Unterrichtsforschung[7)] - muß bei der Analyse der internalen Lernvoraussetzungen und deren Auswirkungen auf den nachfolgenden Lernprozeß beginnen. Dies gilt nicht nur, aber in besonderem Maße für einen genetischen Unterricht, der ja den Schüler lückenlos von seinem momentanen Stand zur Erkenntnis führen will.

Um solches Vorverstandnis zu ermitteln und damit echte Genese vom Schüler aus zu ermöglichen, braucht das genetische Prinzip ein diagnostisches Element. Diesem diagnostischen Element entspricht auf der unterrichtsforschenden und der unterrichtspraktischen Seite ein diagnostisches Instrument, das mit Reformen im schulischen Bereich und fortlaufendem Wandel der gesellschaftlichen Bedingungen veränderte internale Lernvoraussetzungen immer wieder überprüft.

Diese Arbeit will durch
- kritische Reflexion des genetischen Prinzips in der heu-

tigen Mathematikdidaktik unter den oben genannten speziellen Gesichtspunkten und
- eine diese Reflexion stützende und leitende unterrichtsforschende Studie
einen Beitrag dazu leisten, daß das in diesem Sinne ergänzte genetische Prinzip über bloße Lippenbekenntnisse[8] und Sonntagsreden[9] hinaus Anerkennung und Fortführung in der modernen Mathematikdidaktik findet.

Die Durchführung der Arbeit war von drei Thesen geleitet, von denen aus hier die Gliederung erläutert werden soll:

1. Lernprozesse im Mathematikunterricht werden bei jeder Lerneinheit wesentlich durch das Vorverständnis der Schüler aufgrund bereits vorhandener Begriffsbildungen, Operationen, Konzepte und Assoziationen beeinflußt.

2. Dieser für jede echte Genese konstituierende Faktor ist in der bisherigen Literatur zum genetischen Prinzip ungenügend diskutiert worden.

3. Die auf eine bestimmte Lerneinheit bezogenen Lernvoraussetzungen der Schüler lassen sich auf wenige (nicht nur individual- sondern auch sozialgeschichtlich beeinflußte) auf den Lerngegenstand bezogene oder auch allgemeinere Denkansatze/Schemata reduzieren, an die genetischer Unterricht anschließen und die er besonders beachten muß.

Zur Untersuchung der ersten These wird nach einer kurzen Skizze der Geschichte des genetischen Prinzips im zweiten Kapitel der Arbeit zunächst eine Begriffsanalyse durchgeführt, der der Versuch einer eigenen, erganzten Begriffsbestimmung unter neuer Schwerpunktsetzung folgt . Zur Behandlung der zweiten These schließt sich im dritten Kapitel dann eine mehr am Mathematikunterricht orientierte Analyse der neueren Vorstellungen von genetischem Mathematikunterricht, vor allem unter dem Aspekt der Rolle des Vorverständnisses, an.

Der dritten These geht eine empirische Studie im vierten Kapitel nach, in der mit Hilfe von Fehleranalysen und ergänzenden Befragungen die Beeinflussung des Lernprozesses durch internale Lernvoraussetzungen wie Vorbegriffe oder Präkonzepte verfolgt wird. Dabei können natürlich aufgrund von nur zwei betrachteten Lerneinheiten, des relativ geringen und nicht in jeder Beziehung repräsentativen Stichprobenumfangs sowie der begrenzten Reichweite der verwandten Methoden keine allgemeingültigen Ergebnisse erwartet werden. Dies ist jedoch auch gar nicht beabsichtigt, die Studie soll vielmehr auf das fast systematisch vernachlässigte Problem der Auseinandersetzung mit und des Anschlusses an internale Lernvoraussetzungen aufmerksam machen und Ansätze zu deren Erforschung bieten.

2. Zum genetischen Prinzip

2.1. Zur Geschichte des genetischen Prinzips

Eine genaue Analyse der Rolle des genetischen Prinzips in der Geschichte der Mathematikdidaktik bietet die Arbeit G. Schubrings, die an die Dissertationen von Becker und Köhnlein anschließt. Deshalb kann ich mich hier darauf beschränken, noch einmal die wesentlichen Grundlinien der Entwicklung nachzuzeichnen, um aus der Geschichte dieses Prinzips Verständnis für den heutigen Stellenwert und die heutigen Entwicklungstendenzen zu vermitteln.

Sicherlich ist nicht F. Klein der Begründer des genetischen Prinzips, wenngleich er auch am Anfang dieses Jahrhunderts viel zu dessen Verbreitung und allgemeiner Anerkennung in der Mathematikdidaktik beigetragen hat.[10] Vielmehr zeigt Schubring:

"Die Grundlage für die Entstehung des genetischen Prinzips ist somit in der Herausbildung der neuzeitlichen Wissenschaft, der modernen Naturwissenschaft und ihrer Wissenschaftsauffassung zu suchen." (Schubring 1978, S.18)[11]

Die Geschichte des genetischen Prinzips beginnt demnach zeitlich parallel mit dem Durchbruch der Methoden der modernen Naturwissenschaften am Beginn des 17. Jahrhunderts, ihrem auch induktiven und experimentellen Vorgehen, das die reine Deduktion bzw.die kontemplative Auffassung der an die Theologie gebundenen Scholastik ablöst. So kann als einer der ersten Vertreter dieser neuzeitlichen Philosophie der Erkenntnis Bacon, der einen großen indirekten Einfluß auf die Entwicklung der Didaktik hatte, zwar nicht als "Begründer", wie Schubring (Schubring 1978, S.19) ihn nennt, aber doch als ein wichtiger Wegbereiter des genetischen Prinzips angesehen werden. Bacon beschreibt im Gegensatz zur noch vorherrschenden Wissenschaftsauffassung seiner Zeit die Methode der Entdeckung neuen Wissens so:

Der Weg "zur Untersuchung und Auffindung der Wahrheit... leitet von der sinnlichen Wahrnehmung und vom einzelnen....

Grundsätze her, er steigt dann allmählich und stufenweise höher, bis er erst ganz zuletzt zu den allgemeinsten, höchsten gelangt - das ist der wahre Weg, aber noch ganz unbetreten." (Bacon 1971, S.29)

Der Empirist Bacon verspricht sich allein von der Induktion Erkenntnisgewinn. Dabei tritt die Aktivität des Suchenden gegenüber seinem Erkenntnisobjekt an die Stelle der kontemplativen Schau, wenngleich auch die diese Aktivität steuernden generalisierenden Vermutungen bei Bacon noch nicht deutlich gesehen werden.

In der Weiterentwicklung dieser Philosophie der Erkenntnis greift Descartes die deduktive Metnode in anderer Form wieder auf, was jedoch für ihn und seine Zeitgenossen entgegen den heutigen Auffassungen keinen Gegensatz zum genetischen Prinzip bedeutet, da Descartes

"die Gegenstände nicht als fixiert, sondern als veränderlich ansieht." (Schubring, S.25)

Deduktion ist bei Descartes im Sinne von synthetischem Denken gemeint, eine Teilerkenntnis generiert neue Hypothesen und damit neue Erkenntnismöglichkeiten. Descartes schreibt:

"Wobei ich mit den einfachsten und allgemeinen (Problemen) begann und jeden wahren Satz, den ich fand, als Regel zur Auffindung weiterer Sätze benutzte." (Descartes 1974, S.17)

Die so verstandene deduktive und die genetische Methode, heute oft als Gegensatzpaar einander gegenübergestellt, waren also zu dieser Zeit zwei Seiten einer Methode der Erkenntnisgewinnung.[12)]

Parallel zur oben angedeuteten Wissenschaftsentwicklung des 17. und beginnenden 18. Jahrhunderts bildetetn sich zur gleichen Zeit Ansätze eines allgemeinen Schulwesens, verbunden mit einer schrittweisen Ablösung der Pädagogik aus dem Primat der Theologie und der Herausbildung einer eigenständigen Didaktik, markiert durch die Namen Comenius und Ratke. Die Privaterziehung wird langsam von der Erziehung als institutionalisierter, d.h. als bewußt gesellschaftlich organisierter Aufgabe abgelöst, wobei zunächst nicht der Ma-

thematikunterricht, sondern der fremdsprachliche und der muttersprachliche Unterricht in den "Realien" im Zentrum der didaktischen Überlegungen stand. Trotzdem gab es auch schon zu dieser Zeit Ansätze zu einer genetischen Gestaltung von Mathematikunterricht, vor allem von den französischen Mathematikern A.Arnauld (1612-1694) und A.C. Clairaut (1713-1765), deren Erkenntnisse teilweise noch aus dem Privatunterricht an Fürstenhöfen resultierten. Arnauld ist auch einer der ersten, der zwischen Forschungsmethode und Methode der Vermittlung differenzierte und so die bei den empiristischen bzw. rationalistischen Philosophen bestehende Einheit von Induktion bzw. Deduktion und Genese durchbricht. Arnaulds Kritik entzündet sich vor allem am damaligen Standardwerk der höheren Mathematik, den "Elementen des Euklid", an dem er didaktisch[13)] schlecht aufgebaute sowie von der Anschauung her überflüssige Beweise kritisiert. Insgesamt sieht er den Aufbau vom didaktischen Standpunkt her als ungeordnet an, die Beweissequenzen angefüllt mit Hilfssätzen, deren Sinn dem Leser zunächst verborgen bleibt und sich höchstens in der Rückschau erschließt. Er setzt dem in seinem 1667 erschienenen Buch "Nouveaux Elemens de Géométrie" eine logisch-genetisch orientierte Alternative gegenüber. Da das Buch anonym erschien und bei einigen Mathematikern großen Anklang fand, wurden zwar Arnaulds Gedanken bald Allgemeingut, sein Name jedoch geriet in Vergessenheit.

In dem 1741 erschienenen Werk "Eléments de Géometrie" Clairauts taucht zum ersten Mal die historisch-genetische Methode auf, die wesentliche unterrichtsgestaltende Parallelen zwischen dem Lernprozeß des Anfängers und der in der Mathematikgeschichte erkennbaren Wissenschaftsentwicklung sieht (Parallelismushypothese, s.u.).

Der nächste wesentliche Entwicklungsschritt in der Geschichte des genetischen Prinzips ist verbunden mit der sich im Zuge der ersten industriellen Revolution durchsetzenden allgemeinen Schulpflicht und der dadurch bewirkten Ablösung eines autonomen Bildungssystems von der Wissenschaft. Die

bei den Rationalisten bestehende Einheit zwischen Deduktion und Genese wird dabei endgültig aufgegeben, die soziale Dimension von Unterricht tritt beherrschend hinzu. Auch gewinnt der Mathematikunterricht - vor allem im Preußen nach der Humboldtschen Reform - stark an Boden.[14] Die Entwicklung und Verbreitung des genetischen Prinzips geschieht im 19. Jahrhundert jedoch vor allem in der allgemeinen Didaktik, ausgehend von Lindner (1779-1851) und vor allem Mager (1810-1858)[15], der wesentlich die Herbartianer beeinflußte.

Bei Lindner bildet die historisch-genetische Methode zum ersten Mal ein allgemeinpädagogisch-didaktisches Konzept. In der "Pädagogischen Real-Enzyklopädie I" von 1851 findet man eine auf Lindner und Mager zurückgehende erste relativ knappe Definition der genetischen Methode.

"Genetische Methode nennen wir diejenige Lehrart, bei welcher die Gegenstände in ihrer natürlichen Ordnung, und zwar so behandelt werden, daß man vom Einfachen zum Zusammengesetzten, vom Kleineren zum Größeren, vom Leichten zum Schweren fortschreite, dabei jedoch die einzelnen Momente aufs sorgfältigste untereinander verbindet."
(Päd. Real-Enzyklopädie I, S. 759)

Als Vorteile der genetischen Methode werden genannt

"daß sie das eigene Interesse des Schülers für den Gegenstand erregt und fortwährend erhält; für die ganze Tätigkeit des Schülers zum Selbstfinden und Hervorbringen ohne Zwangsmittel erweckt; zur Gründlichkeit im Wissen und zur Genauigkeit in allem Tun hinleiten; einen festen, ununterbrochen fortgehenden Gang befolgt, der in der Natur des Gegenstandes gegründet und den Entwicklungs- und Bildungsgesetzen der Anlagen gemäß ist, folglich den Zweck allen Unterrichts, die wahre Erziehung, am sichersten fördert."
(Päd. Real-Enzyklopädie I, S. 760)

Mager sah als erster die Einheit von Schulsystem und Schulorganisation, Inhalt und Methode des Unterrichts und entwickelte demgemäß

"die erste umfassende Konzeption des genetischen Prinzips für den Schulunterricht, die gerade von der Spezifik des Bildungssystems gegenüber dem Wissenschaftssystem ausging."
(Schubring, S. 65)

Die genetische Methode wird also bei Mager erstmals zum

genetischen Prinzip, einem sehr umfassenden didaktischen und sogar schultheoretischen Prinzip. Schon der Titel seiner ersten Schrift "Wissenschaft der Mathematik nach heuristisch-genetischer Methode, Leitfaden beim Schulunterricht" (1837) zeigt, daß sich bei Mager, beeinflußt durch die Hegelsche Philosophie, der Schwerpunkt weg vom historischen zum heuristischen Aspekt, hin zur Beziehung zwischen (Selbst-) Tätigkeit und Entwicklung des Lernenden bewegt. Am intensivsten waren jedoch Magers Bemühungen um einen genetischen Unterricht im Bereich der Fremdsprachen, die durch den regen Handelsaustausch in dieser Zeit zunehmend an Bedeutung gewannen. Mager war wohl auch der erste Fürsprecher einer Fachdidaktik, die die spezifischen Methoden und Inhalte des jeweiligen Fachs berücksichtigt und sich an diesen teilweise orientiert, betonte also das genetische Prinzip als ein gegenstandsorientiertes Prinzip. Mager war es auch, der die spätere Differenzierung in ein logisch-genetisches, ein historisch-genetisches und ein psychol.-genet. Prinzip einleitete, indem er dessen pädagogisch-psychologische Dimension von dem für ihn vorwiegend gegenstandsbezogenen Prinzip abtrennte. Dies geschieht durch eine von ihm geforderte einfache zweiphasige Kindesentwicklung, die im Ansatz Piagets Stufen der konkreten und formalen Operationen entspricht. Während in der ersten Phase (bis zum 13./14. Lebensjahr) die Anschauungen aufgebaut werden, kommt nach seinem Verständnis dann erst in der zweiten Phase der Begriffsentwicklungen aus den Anschauungen das genetische Prinzip recht zum Tragen. Im Falle der Mathematik war Mager der Auffassung, sie sei ein "toter Stoff", d.h. ohne Entwicklung. Deshalb muß erst durch die konstruktive geistige Tatigkeit, in diesem Fall des Lernenden, Entwicklung, Bewegung in die Mathematik hineingebracht werden, wobei dies durch "Kombination"[16] ihrer verschiedenen Elemente zu geschehen hat. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts wurden Magers Ideen und mit ihnen das genetische Prinzip von den Herbartianern (s. Schwager 1958, S. 61 ff.) absorbiert, von diesen umgeformt und der formalen Stufenlehre untergeordnet. Durch die strikte Abwendung

von den herbartianischen Vorstellungen zu Anfang des 20. Jahrhunderts wurde dann auch ein deutlicher Bruch in der Entwicklung des genetischen Prinzips verursacht. In der Mathematikdidaktik wurde diese Entwicklung neu - ohne Bezug auf die vorangegangene Tradition - mit F. Klein und O. Toeplitz aufgenommen; wahrscheinlich ein Grund dafür, daß diese z.B. von Wittmann oder auch indirekt von Wagenschein als Begründer des genetischen Prinzips angesehen werden.

Die Entwicklung des genetischen Prinzips unter den Herbartianern[17], im mathematikdidaktischen Bereich im wesentlichen von Ballauf und Ziller getragen, möchte ich übergehen, da hier die verschiedenen Varianten auftauchten[18], jedoch wegen der formalen Bildungsauffassung, die der Gegenstandsbezogenheit des genetischen Prinzips widerspricht[19], keine Entwicklungsfortschritte erzielt wurden. Wesentlich dagegen ist, daß über die Herbartianer das genetische Prinzip im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts der beherrschende Begriff in der Mathematikdidaktik wurde.

In dieser Zeit riß der Faden zwischen Mathematik und Mathematikdidaktik völlig ab[20] und wurde erst nach der Meraner Reform von F. Klein in den letzten Jahren des 19. Jahrhunderts wieder aufgenommen. Damit verband sich eine neue Gegenstandsorientierung des genetischen Prinzips an der mathematischen Wissenschaft. Über diese inhaltliche Neuorientierung am aktuellen Wissenschaftsstand wurde allerdings - ähnlich der Curriculumrevision der 60er Jahre dieses Jahrhunderts - die pädagogisch-didaktische Seite vernachlässigt, wobei wiederum die enge Verbindung mit der allgemeinen Didaktik verlorenging. Die Mathematikdidaktik wurde in der Folgezeit mehr und mehr zu einer Stoffdidaktik, die

> "die schülergerechte Transformation der neuen Wissenschaftsinhalte zu ihrem Gegenstand erklärte"
> (Schubring, S. 139)

und in der didaktische Prinzipien wie das genetische nicht als Leitideen in selektiver und ordnender Funktion wirksam wurden.

Zu Kleins Auffassung vom genetischen Prinzip bemerkt Schubring:

"Für Klein war es selbstverständlich, daß die Darstellung des Unterrichtsstoffes auf der Grundlage des genetischen Prinzips erfolgen mußte, so selbstverständlich, daß er nie genauere Ausführungen über sein Verständnis vom genetischen Prinzip gemacht hat....Klein benutzt die damaligen unterschiedlichen Auffassungen vom genetischen Prinzip, das psychologisch-genetische.... und das historisch-genetische nebeneinander, ohne allerdings um eine systematische Fassung bemüht zu sein."
(Schubring, S. 142/143)

Für Klein wurde die Beziehung zwischen der logisch- bzw. historisch-genetischen und der psychologisch-genetischen Seite durch das zu seiner Zeit die Diskussion beherrschende biogenetische Grundgesetz[21)] hergestellt, obwohl dessen Anwendbarkeit in der Pädagogik schon damals in Zweifel gezogen wurde.[22)] Die Orientierung an den neuen Stoffen drängte dann auch das genetische Prinzip schon bei Kleins Schülern zurück, besonders augenfällig bei Lietzmann,[23)] der das historisch-genetische Prinzip wie das biogenetische Grundgesetz ablehnte. Es verkümmerte zum heuristischen Prinzip, auf das zwar hin und wieder hingewiesen wird, das jedoch in der Mathematikdidaktik kaum Wirkung entfaltet.

Bis über das Ende des 2. Weltkrieges hinaus beherrschte das aus der deutschen Reformpädagogik aufgegriffene arbeitsunterrichtliche Prinzip die allgemeindidaktische und mathematikdidaktische Diskussion.

Erst Anfang der 60er Jahre unseres Jahrhunderts wurde das genetische Prinzip vor allem von Wagenschein und Wittenberg (auf die ich unter dem Aspekt Lernvoraussetzungen in Kap. 3 noch genauer eingehe) als Reaktion auf die wiederkehrende Stofforientierung und Axiomatisierung der "Neuen Mathematik" wiederbelebt, wobei die Parallelismushypothese wieder häufig als Begründung dient. Bei den geistigen Schülern Wagenscheins und Wittenbergs, insbesondere bei E. Wittmann, wird im Gegenzug - ähnlich Lietzmann - wieder die heuristische Dimension des genetischen Prinzips betont, und

"der Anschluß an das Vorverstandnis der Adressaten"
(Wittmann 1981, S. 131)

als wesentliches Merkmal genetischen Unterrichts hervorgehoben.

Dabei wird jedoch nirgendwo der Versuch unternommen, dieses Vorverständnis und dessen Einfluß auf den Lernprozeß detailliert zu ermitteln und es dann als konstituierenden Faktor in die Genese einzubeziehen. Vielmehr ergibt sich die Einschätzung des Vorverständnisses lediglich aus der vom Schüler jeweils erreichten Entwicklungsstufe im Sinne Piagets und dem Standort der Lerneinheit im Gesamtcurriculum (s.Kap.3)

Das genetische Prinzip spielt in der heutigen mathematikdidaktischen Diskussion wieder eine bedeutende Rolle, wenn es auch nicht allein beherrschend ist. Schubring sieht in der gegenwärtigen Diskussion um das genetische Prinzip Tendenzen

"das genetische Prinzip zu einem umfassenden didaktischen Prinzip auszubauen, das die wesentlichen Kategorien von Entwicklungsauffassungen einbezieht."
(Schubring, S. 172)

Dies wird nicht nur bei Wittmann, sondern auch schon bei Wagenschein deutlich, der von einer historisch-genetischen zu einer eher heuristisch-genetischen Phase gelangte, in der die "Einwurzelung" ("enracinement"[24]) im Vordergrund steht.

Insgesamt glaubt Schubring (S.174-176) vor allem drei Tendenzen in der Diskussion um das genetische Prinzip in der Bundesrepublik zu erkennen:

1. Das genetische Prinzip wird von einem Prinzip der gymnasialen Mathematikdidaktik zu einem umfassenden Prinzip einer einheitlichen, alle Schularten einbeziehenden Mathematikdidaktik.[25]

2. Die Probleme der Begriffsentwicklung werden nicht mehr isoliert in der Mathematik und der Mathematikdidaktik diskutiert, sondern die Ergebnisse der Bezugswissenschaften werden berücksichtigt und mit ihnen in Kooperation bearbeitet, vor allem hinsichtlich der Forschungen zur Begriffsent-

wicklung bei Kindern, so in der Kognitionspsychologie und in der pädagogischen Psychologie.[26)]

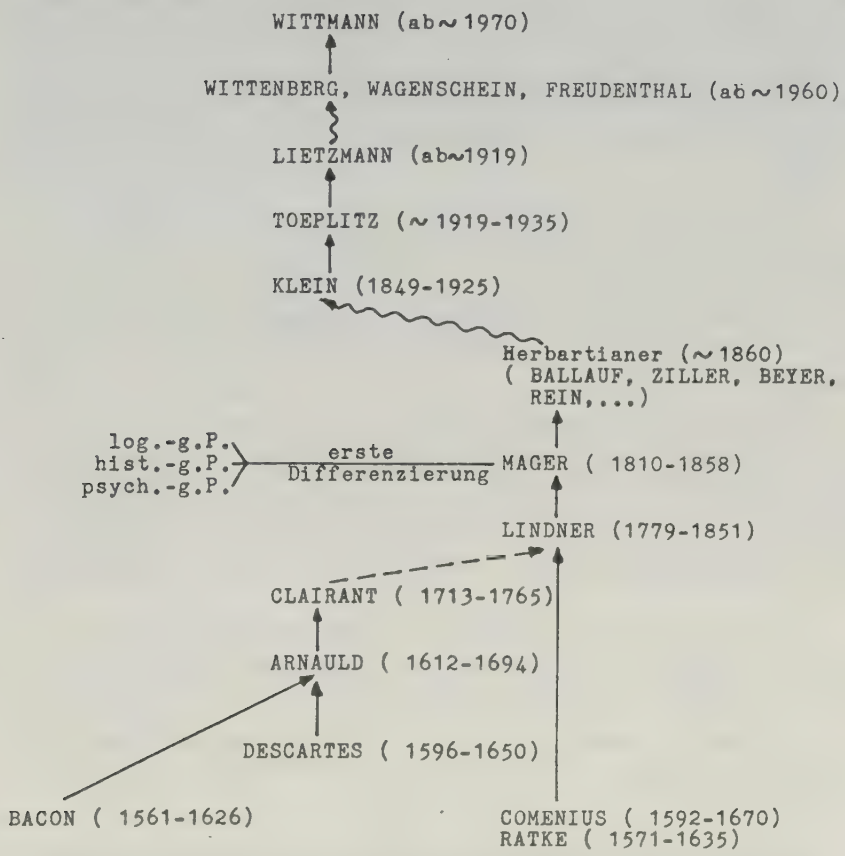
3. Erkenntnistheoretische Arbeiten zur Begriffsauffassung und Begriffsentwicklung werden stärker berücksichtigt.

Aus dem kurzen geschichtlichen Abriß wird schon deutlich, daß die Vielfalt der Diskussionsebenen und Positionen zum genetischen Prinzip auf eine Komplexität der mit ihm angesprochenen Entwicklungsprobleme verweist, die sich nicht auf einfache "Lösungen" reduzieren läßt. Daß das genetische Prinzip sehr häufig im Hinblick auf den Mathematikunterricht diskutiert wurde, dürfte nach Schubring darin begründet sein, daß sich der nicht empirische, theoretische Charakter von Begriffen in der Mathematik am wenigsten verdecken läßt. (s. jedoch Wagenscheins Arbeiten im Bereich Physik.) Dagegen blieb eine historische Aufarbeitung und eine ordnende Diskussion des genetischen Prinzips (vor Schubring) in den letzten Jahrzehnten der allgemeinen Didaktik vorbehalten (z.B. Klafki 1957, Schwager 1958, Kronen 1968...).

Auch weist der geschichtliche Rückblick darauf hin, daß wegen des fehlenden Kommunikationszusammenhangs sowie aufgrund des mangelnden historischen Bewußtseins in der Mathematikdidaktik bisher kaum ein kontinuierlicher Fortschritt festzustellen ist. Das gilt auch für die Entwicklung des genetischen Prinzips, die am ehesten durch eine Wellenbewegung zu beschreiben ist.

In der nachfolgenden Übersicht wird noch einmal versucht, die mit der Entwicklung des genetischen Prinzips (in der Mathematikdidaktik) verbundenen Namen und Daten zusammenzustellen:

Übersicht zur Geschichte des genetischen Prinzips, i.b. in der Mathematikdidaktik



sokratisches Element, mäeutische Lehrkunst
bei PLATON (427-347 v.Chr.)

Anm.: Bei den neueren Vertretern ist jeweils die ungefähre Wirkungszeit angegeben.
"Bruchstellen" der Entwicklung sind durch ~~~→ gekennzeichnet, ungesicherte Zusammenhänge durch - - - →.

2.2. Begriffsanalyse

Bevor ich eine nähere Begriffsanalyse durchführe, möchte ich einige vorläufige Begriffsbestimmungen einander gegenüberstellen, um dann von diesen und der kurz skizzierten historischen Entwicklung ausgehend, die genetische Methode gegenüber anderen Unterrichtsmethoden und die verschiedenen Varianten des genetischen Prinzips gegeneinander auszudifferenzieren.

"Genese" heißt ja "Entstehung, Entwicklung", wobei in der gesamten Geschichte des genetischen Prinzips bis in die heutige Zeit fast ausschließlich die Entwicklung des Gegenstandes, weniger die Begriffsentwicklung, Denkentwicklung des Schülers gemeint ist. So liest man in Herders Lexikon der Pädagogik:

"Die Genetische Methode bezeichnet eine Lehrgangsform, die dem Gegenstand in seinem Werdensprozeß nachgeht und sein Zustandekommen verfolgt. Vom komplexen, undifferenzierten Gesamteindruck ausgehend, wird die Ursprungssituation aufgesucht und durch schrittweises Nachvollziehen von Ursache und Wirkung das Verständnis des Gewordenen in einem kontinuierlichen Prozeß aufgebaut."
(Herder 1970)

Dabei scheint nach Meinung der Verfasserin (E.Neuhaus) das genetische Prinzip immer größere Nähe zum entdeckenden Lernen zu gewinnen, denn sie meint:

"In jüngerer Zeit wird dieser Aspekt des produktiven Suchens und Findens als Kriterium der Genetischen Methode besonders betont."
(Herder 1970)

Genau die gleiche Position nimmt Köhnlein ein, wenn er die genetische Methode so charakterisiert:

"Als "genetisch" bezeichnet man eine Unterrichtsmethode, wenn sie dem Gegenstand in seinem Werdensprozeß nachgeht und sein Zustandekommen verfolgt."
(Köhnlein 1973, S. 407)

Schubring versucht in seine vorläufige Charakterisierung des genetischen Prinzips den Aspekt der Entwicklung der kognitiven Strukturen des Lernenden, mit anderen Worten der Be-

griffs- und Denkgenese, mit einzubeziehen und schreibt auf die Mathematikdidaktik bezogen:

"Das didaktische Prinzip der genetischen Methode, das hier "genetisches Prinzip" genannt wird, stellt den Begriff der Entwicklung ins Zentrum der Mathematik-Didaktik, es will Lehren und Lernen von Mathematik von einer Entwicklungsauffassung her konzipiert sehen. In der Entwicklung des mathematischen Lehrgegenstandes soll das kognitive Tätigkeitssystem des Lernenden entwickelt werden. Es faßt mathematische Begriffe als "gewordene" auf und will ihr "Werden"im Lernprozeß nachvollziehen lassen. "
(Schubring 1978, S. 1)

Als Gegenbild benutzt Schubring, von einem Lakatos-Zitat ausgehend, den "deduktionistischen Stil". Oft wird dem genetischen Unterricht auch ein beschreibender bzw. systematisch-darlegender Unterricht oder "Erläuterungsunterricht" (Lenné 1969, S. 68 ff) gegenübergestellt. Dabei hat Lenné (ähnlich der oben zitierten Definition aus dem Herder-Lexikon) einen zumindest stark heuristisch orientierten genetischen Unterricht, wenn nicht gar eher entdeckendes Lernen vor Augen, wenn er meint, daß

"...im genetischen Unterricht der Schüler soweit möglich die Probleme und ihre Lösung selbst auffinden soll..."
(Lenné 1969, S. 69)

An anderer Stelle heißt es sogar:

"Der genetische Unterricht muß... danach streben, das Ausgangsmaterial für die "Eigenentdeckung des Schülers so zu entwickeln..."
(Lenné 1969, S. 71)

Dem gemeinsamen Grundverständnis seiner Vertreter entspricht es, daß das genetische Prinzip, ähnlich dem Prinzip der Mathematisierung, ein gegenstandsorientiertes Prinzip ist und nicht weitgehend gegenstandsneutral wie etwa das arbeitsunterrichtliche Prinzip.

Von den mit dem genetischen Prinzip befaßten Autoren sind verschiedene Varianten und Aspekte herausgearbeitet worden. So unterscheidet Köhnlein folgende Aspekte, die nicht etwa mit in sich geschlossenen, ausgearbeiteten Varianten gleichzusetzen sind (nach Köhnlein 1973, S. 407 ff).

1. Der Ansatzpunkt des Unterrichts liegt nicht beim heutigen Stand des zu lernenden Sachgebietes, sondern bei dessen historischem Anfang ("wissenschaftshistorischer" Aspekt).

2. Der kulturhistorische Aspekt: Ein "stufenweise und lückenlos fortschreitender Cursus des Verstehens", (Mager 1846, S. 243) in dem Begriffe aus der Anschauung entstehen und der vom Einfachen und leicht Faßlichen zum Zusammengesetzten und unübersichtlich Schwierigen fortschreitet.

3. Der Verzicht auf das Lernen von vorläufig Unverstandenem, der den Primat wissenschaftlicher Stoffsystematik ersetzt durch psychologisch-pädagogische Überlegungen.

4. Der historische Aspekt: Bei den Herbartianern steht der phylo/ontogenetische Parallelismus im weiteren Sinne Pate (Ziller, Kulturstufentheorie).[27)]

5. Der kausale Aspekt: Diese Auffassung betont (einlinig) kausale Entwicklung der Kulturgebiete und Wissenschaften.

6. Der organische Aspekt: Faßt man die Sachgebiete als "organische" Einheiten auf, die sich aus einer "vorangelegten Potenz" entwickeln, so muß man im Unterricht die Teile herausstellen, die das "gestaltende Prinzip" widerspiegeln.

7. Der individuale Aspekt: Die Schule soll sich auf eine individuelle Entwicklung der in der Person angelegten Begabung ausrichten.
(P. Geheeb)[28)]

8. Der heuristische Aspekt: Eine moderne, allerdings schon von Toeplitz begründete Modifikation, die bei H. Roth "originale Begegnung" heißt. Die Schüler werden nicht mit fertigen Ergebnissen konfrontiert, sondern erhalten Gelegenheit, aus einer "Ursprungssituation" heraus selbst Lösungen zu finden, um hierdurch das eigene Entdecken zu fördern.

Diese verschiedenen Aspekte faßt Köhnlein zu drei Hauptaspekten zusammen:

a) dem individualgenetischen Aspekt
b) dem logisch-genetischen oder heuristischen Aspekt
c) dem historisch-genetischen Aspekt.

Der individualgenetische Aspekt

"ist an einer Theorie der Entwicklung des Denkens bzw. der Persönlichkeit orientiert."
(Köhnlein, S. 411)

Der heuristische oder logisch-genetische Aspekt

"betont das (Nach-) Entdecken mathematischer oder naturwissenschaftlicher Sachverhalte, dessen Möglichkeit prinzipiell durch die immanente Logik dieser Wissenschaften gewährleistet wird. Das genetische Prinzip ist hier nicht als ein Verfolgen historischer oder individueller Entwicklungen, sondern als ein verstehendes Nachvollziehen innerer Strukturen des Gegenstandes aufgefaßt."
(Köhnlein, S. 411)

Der historisch-genetische Aspekt

"ist durch eine Kulturstufentheorie oder durch einen behaupteten Parallelismus zwischen Phylo- und Ontogenese bestimmt."
(Köhnlein, S. 411 f.)

Diese drei Hauptaspekte kann man auch, wie etwa Schubring es macht, zu zwei grundsätzlichen Varianten zusammenfassen:

A) Das historisch-genetische Prinzip

Hier steht die Struktur der Sache, d.h. die Entwicklung der Begriffe aus der Sicht des Wissenschaftlers bzw. Wissenschaftshistorikers im Vordergrund. Man kann dabei in folgende Untervarianten differenzieren:

A1) Das wissenschaftshistorisch-genetische Prinzip

Dies wird besonders von einigen Mathematikern vertreten, die behaupten, der Lehrer könne für die einzelne Begriffsentwicklung aus der Geschichte lernen, die Schwierigkeiten vormaliger Forscher seien auch die gegenwärtiger Schüler. Verbreiteter ist die Ansicht, daß man dem "natürlichen" System der auf das jeweilige Fach bezogenen Erkenntnisgeschichte der Menschheit zu folgen hat,[29)] um der "natürlichen" Denkentwicklung des einzelnen gerecht zu werden. Dabei sind aber historische Umwege, Irrwege und Fehler allerdings auszuschließen (s. Toeplitz direkte und indirekte hist.-genetische Methode), was jedoch nur die angenommene einlinige Kau-

salität der Wissenschaftsentwicklung verstärkt. Außerdem steht dem die obengenannte, wenn auch weniger verbreitete Ansicht gegenüber, aus den Schwierigkeiten der Forscher lernen zu können, da in einem solchen Unterricht gerade die aus der Mathematikgeschichte bekannten Schwierigkeiten nicht thematisiert würden. Auch die besonders von Wagenschein vertretene innige Verbundenheit des genetischen Prinzips mit der sokratischen Methode widerspricht dieser Auffassung.

A2) Das kulturhistorisch-genetische Prinzip

Hier stand die von dem Herbartianer Ziller in ihrer Anwendbarkeit ausgeweitete Kulturstufentheorie Herbarts Pate. Die Stufung des Unterrichts soll der Entwicklung der Kulturstufen (bei Herbart 7, s. z.B. Schwager 1957, S. 67 f.) folgen und ist damit nicht fachlich orientiert.

A3) Das organisch-genetische Prinzip

In dieser Variante wird schon der Übergang zur Initiierung einer wirklichen Genese beim Schüler und damit eine Nähe zum eher schülerorientierten psychologisch-genetischen Prinzip deutlich. Aus der in der Sache "vorangelegten Potenz" heraus soll "das Denken des Lernenden entwickelt werden" (s. Schwager 1957, S. 71)

Zumindest A1) und A2) basieren letztlich auf der auf die Erziehung angewandten Parallelismushypothese. Einige wichtige Einwände gegen das historisch-genetische Prinzip sind somit (nach Schwager 1957, S. 70):

1. Träger des geschichtlichen Ganges sind stets Erwachsene, die eine andere Problematik als Kinder haben. (Lange)

2. Die Schüler leben nicht unter den jeweils gleichen äußeren und inneren Bedingungen, unter denen sich die jeweilige Denkweise bzw. Begrifflichkeit herausgebildet hat. (Lange)

3. Sobald das Kind die Erwachsenenwelt entdeckt, springt es über Jahrtausende. (Flitner)

4. Die älteren Kulturstufen sind viel zu kompliziert, als daß sie ein Schüler schon so früh begreifen könnte. (Weniger)

Gegen den ersten und zweiten Einwand läßt sich wiederum vorbringen, daß es durchaus denkbar ist, daß Kinder sich in einigen Punkten mit ähnlichen Problemen beschäftigen, die in geschichtlicher Zeit Erwachsenenprobleme waren. Insbesondere im kindlichen Spiel mit seinen alterstypischen Erfahrungsmöglichkeiten geschieht sicherlich manchmal ein partieller Nachvollzug ontogenetischer Entwicklungsstufen. Fraglich bleibt natürlich, ob daraus ein didaktisches Prinzip entwickelt werden kann.

B) Das psychologisch-genetische Prinzip (auch entdeckend-gen. oder heuristisch-gen. genannt)

Hier steht die Entwicklung - die Genese - des Begriffssystems des Lernenden im Vordergrund. Es geht ebenfalls von einer "natürlichen" Beziehung des Lernenden zum Gegenstand aus, der wesentlich in der aktuellen Lebenswelt des Schülers verankert gesehen wird. Deshalb wird der Anschluß an das Vorverständnis der Schüler im Sinne vorbegrifflicher Weltauffassung betont (zur Kritik s. 2.3., 3.). Merkmale solcher genetischer Darstellungen, die an den erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik ausgerichtet sein müssen, sind nach Wittmann:

1. Einbettung in größere ganzheitliche Problemkontexte außer- und innerhalb der Mathematik (s. Köhnlein, Aspekt 2).

2. Die Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus (s. Kö. 2,6,8).

3. Eine Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze (s. Kö. 8).

4. Durchgehende Motivation und Kontinuität (s. Kö. 3).

5. Eine während des Voranschreitens allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerung (s. Kö. 2).

6. Anschluß an das Vorverständnis der Schuler (s. Kö. 2,3).

Wie die Klammerverweise andeuten sollen, lassen sich die von Wittmann herausgestellten Merkmale verschiedenen Aspekten

Köhnleins zuordnen. Dabei ist allerdings Merkmal 1 kaum ein spezifisches Merkmal genetischen Unterrichts.

Was Wittmann sich unter dem Anschluß an das Vorverständnis vorstellt, wird in Kap. 3 näher analysiert.

Insgesamt dient das psychologisch-genetische Prinzip oft nur der Einführung von Begriffen. Daran kann sich eine systematische Behandlung anschließen, ja für manche Autoren bildet diese sogar eine notwendige Ergänzung (s. z.B. Lenné 1969, S. 69).

Verschiedene Vertreter sind entweder mehr entwicklungspsychologisch (Wagenschein) oder heuristisch (Lietzmann, Freudenthal) orientiert, wobei hier eine Berührung mit dem entdeckenden Lernen und allgemeinen Prinzipien der Selbsttätigkeit der Schüler sichtbar wird.

Die von Köhnlein herausgestellten Aspekte kann man auf folgende Weise den oben erläuterten und von mir weiter ausdifferenzierten Varianten Schubrings zuordnen:

zu A1) Aspekte 1 und 5
zu A2) Aspekte 2, 4 und 5
zu A3) Aspekte 6
zu B) Aspekte 3, 7 und 8

Eine Betonung der Einlinigkeit der Entwicklungen im Wissenschafts- bzw. Kulturbereich liegt, wie schon oben betont, sowohl bei A1) als auch bei A2) vor, deshalb wird Aspekt 5 beiden Varianten zugeordnet. Insgesamt gibt es hier noch außer der Auffassung paralleler Einlinigkeit von Wissenschafts- bzw. Kulturgeschichte und Unterricht die beiden Auffassungen, daß die Geschichte zwar verwickelt gewesen sei, der Unterricht dies aber nicht sein dürfe (s. z.B. Toeplitz) oder daß der Unterricht so verwickelt sein müsse, wie die Geschichte es war.

Aspekt 2 ließe sich auch der psychologisch-genetischen Variante zuordnen; seine Bedeutung stammt aus einer Zeit, in der das Prinzip der Anschauung und bestimmte ganzheits-

unterrichtliche Auffassungen sich noch nicht gegenüber dem genetischen Prinzip ausdifferenziert hatten.

Während Aspekt 3 sich fast unverändert bei Wittmann wiederfindet, deutet Aspekt 8 den fließenden Übergang zum entdeckenden Lernen an.

Sicher beinhalten diese verschiedenen Aspekte aber, wie Wagenschein betont, verschiedene Funktionen des genetischen Prinzips:

1. Als pädagogisches Prinzip hat es erschließende Funktion.
2. Als Prinzip der Verwurzelung erhält es fundierende Funktion.
3. Als Prinzip der Kontinuität kommt ihm regulative Funktion zu.
4. Als Prinzip der Sachgemäßheit enthält es eine motivierende und erschließende Funktion.
5. Als methodisches Prinzip hat es unterrichtsgestaltende Funktion.
6. Als erkenntnistheoretisches Prinzip enthält es eine bildende Funktion.

Oft wird das genetische Prinzip ja ausschließlich in erschließender Funktion, d.h. in Form genetischer Einstiege gebraucht. Dabei ist aber sicher auch eine Anbindung an die schon vorhandene Denk- und Begriffswelt des Schülers (Verwurzlung) beabsichtigt. Nicht jeder Stoff und nicht beliebige Stoffe in beliebiger Reihenfolge sind hier möglich, will man Kontinuität wahren. Von seiner Funktion als erkenntnistheoretisches Prinzip wird in den folgenden Absätzen noch die Rede sein.

Wittenberg betont von den oben angeführten Funktionen in seinem 1968 aus seinem Nachlaß herausgegebenen Aufsatz "Das genetische Unterrichtsprinzip" besonders das dem genetischen Prinzip seiner Vorstellung innewohnende "Prinzip der Sachgemäßheit" (Wittenberg 1968, S. 105) und das erkenntnistheoretische Prinzip.

"Das genetische Prinzip als ein Prinzip der Sachgemäßheit

besteht darin, das, was man unterrichtet, aus den Gründen heraus zu entwickeln, die ihm seine gegenwärtige Gestalt gegeben haben."
(S. 105/106)

Das bedeutet für ihn, im Unterricht

"...immer wieder klarzumachen, warum eine Begriffsbildung oder eine Theoriebildung den Weg gehen mußte, den sie tatsächlich gegangen ist."
(S. 106) (s. Roths originale Begegnung)

Daß dies - wenn es in der obigen Formulierung auch so klingen mag - keineswegs identisch ist mit dem vorhin erwähnten historischen Aspekt im Sinne Köhnleins, betont Wittenberg gleich zu Anfang:

"Nehmen wir vorweg, daß es (das genetische Unterrichtsprinzip; Anm. d. Verf.) nicht darin besteht, im tatsächlichen Unterricht die historische Entwicklung einer Disziplin nachzuvollziehen. Dieser alte Irrtum kann jetzt als abgetan gelten.30)"
(S. 105)

Er fährt dann im Sinne der Toeplitzschen "indirekten genetischen Methode" [31] einschränkend fort:

"Wohl wird man der historischen Entwicklung stellenweise folgen. Man tut es dann aber nicht deshalb, weil es die historische, sondern weil es die sachgemäße Entwicklung ist."
(S. 105)

Wittenbergs schon oben angeführte Mahnung, zu zeigen "...warum eine Begriffsbildung... den Weg gehen mußte...." wird vielmehr vor einem klar erkenntnistheoretischen Hintergrund ausgesprochen. Für ihn ist das genetische Prinzip gleichzeitig mit dem in ihm enthaltenen Prinzip der Sachgemäßheit

"zunächst... im wesentlichen ein erkenntnistheoretisches Prinzip."
(S. 106)

und enthält hierdurch wie bei Wagenschein seine allgemeinbildende Funktion (s.o.). Dieses bei Wittenberg quasi das Fundament des genetischen Prinzips bildende erkenntnistheoretische Prinzip

"...verlangt, daß der Unterricht den erkenntnistheoretischen Hintergründen der heute bestenenden Theorien und der heute akzeptierten Begriffsbildungen auf den Grund gehe.

Es fordert also vom Lehrer und Schüler, sich darüber klarzuwerden, warum man so und nicht anders denkt; ein sehr hoher Anspruch. Es begründet ein sehr substantielles und tiefgreifendes Wissen." (S. 106)

Damit erzieht ein nach dem genetischen Prinzip geführter Unterricht gleichzeitig zur "Skepsis", denn hier

"...wird immer wieder gefragt: Warum wird das heute allgemein geglaubt, welches ist die Funktion und die Rechtfertigung dieser Begriffe, und aus welchen Gründen wurde das früher Geglaubte verworfen?" (S. 106)

Es ist bemerkenswert, daß bei vielen Vertretern des genetischen Prinzips, allen voran Wagenschein, die Sprache eine wesentliche Funktion im Lernprozeß innehat. Das Schülerdenken ist ja im Verständnis des genetischen Prinzips nicht als Rest vorlogischer Denkweisen zu überwinden, sondern als Ansatzpunkt des mathematischen Denkens aufzunehmen und weiterzuentwickeln. Deshalb muß der Forderung nach muttersprachlicher Verankerung und nach vorsichtiger Weiterentwicklung einer altersgemäßen Sprache große Bedeutung zukommen. Nur so kann die altersspezifische Denkart des Lernenden produktiv aufgegriffen und zur Grundlage fachlichen Weiterdenkens gemacht werden.

Diese altersspezifische Denkart ermittelt Wagenschein aber nur aus Einzelbeispielen, Fragmenten, die in keinem größeren Zusammenhang stehen. Abgesehen von der Seminarbefragung "Was bleibt unseren Abiturienten vom Physikunterricht?" (1956/1960) gab es meines Wissens durch und um Wagenschein sowie die anderen Vertreter des genetischen Prinzips keine empirische Untersuchung zu dieser Fragestellung.[32)]

Denken und Verstehen ist an Sprache gebunden und qualitativ unterschieden von grundlegenden Erfahrungen, die auch im vorsprachlichen Lernprozeß erworben werden können.[33)] Zwischen zunehmender Sprachkompetenz und einer Verbesserung des Mathematikverständnisses besteht nach Wagenschein ein Wechselwirkungsverhältnis, wobei die Überwindung der Spaltung zwischen ursprünglichem Verstehen und exaktem Denken nur mit Hilfe einer reichen, differenzierten, noch nicht

fachlich eingeengten Sprache möglich ist. V. Weizsäcker betont:

"Die sogenannte exakte Wissenschaft kann niemals und unter keinen Umständen der Anknüpfung an das, was man die natürliche Sprache oder die Umgangssprache nennt, entbehren. Es handelt sich stets nur um einen Prozeß der vielleicht sehr weit getriebenen Umgestaltung derjenigen Sprache, die wir immer schon sprechen und verstehen."
(v. Weizsäcker 1960, S. 140)

Auch das ist ein Element des Aufgreifens von Vorverständnis, das besonders im Mathematikunterricht wirksam ist. Der Lehrer muß sich am Anfang um die gleiche Sprache wie der Schüler bemühen, da, wenn der Lehrer von vorneherein eine exakte Sprache benutzt (und diese auch von den Schülern erwartet), die Schüler ihn oft nur nachahmen und unverstandene Formulierungen übernehmen. Den erschließenden, sprachlich gebundenes Vorverständnis aufgreifenden Charakter der Sprache hebt v. Weizsäcker noch einmal am Ende des oben zitierten Vortrags hervor:

"Es gibt einen immer schon erschlossenen Bereich, in dem man sich gut genug verständigen kann, um - auf das dort herrschende Verständnis aufbauend - neue Bereiche zu erschließen. Der schon erschlossene Bereich, in dem wir uns verständigen können, ist uns erschlossen nicht nur, aber weitgehend durch die Sprache, die wir jeweils haben und die die Logiker heute manchmal Umgangssprache nennen, die Voraussetzung der weiteren Erkenntnis und damit auch der weiteren Verschärfung der Begriffe."
(v. Weizsäcker 1960, S. 152)

Um es noch einmal bildhafter auszudrücken: Die Muttersprache ist kein zu beseitigender Abraum, sondern die Sprache des Verstehens, die Fachsprache dagegen die Sprache des Verstandenen. (Ähnlich Wagenschein 1970, S. 162)

Auch Niels Bohr spricht sich in einem von W. Heisenberg aufgezeichneten persönlichen Gesprächen im Zusammenhang mit der Quantentheorie gegen eine zu frühe fachliche Einengung der Sprache aus und ruft Schiller als Zeugen auf:

"Mit dieser Einengung der Sprache kann ich natürlich auch nichts anfangen", nahm Niels wieder das Wort. "Du kennst doch das Schiller'sche Gedicht "Spruch des Konfuzius",

und du weißt, daß ich da besonders die Zeilen liebe "Nur die Fülle führt zur Klarheit, und im Abgrund wohnt die Wahrheit." Die Fülle ist hier nicht nur die Fülle der Begriffe, der verschiedenen Arten, über unser Problem und die Phänomene zu reden."
(Heisenberg 1979, S. 245f)

An anderer Stelle bemerkt Bohr zur Beziehung zwischen Sprache und Denken:

"Die Sprache ist gewissermaßen ein Netz, das zwischen den Menschen ausgespannt ist, und wir hängen mit unserer Möglichkeit der Erkenntnis in diesem Netz."
(Heisenberg 1979, S. 165)

Eine Auffassung, die sehr an Whorf (s.u.) erinnert.

Den genetischen Unterricht begleitet nach Wagenschein ein dreiphasiger sprachlicher Prozeß:

1. Phase des Suchens (nach der Exposition).
Die Schüler sollen gemeinsam versuchen, das Problem auszusprechen und damit in den Griff zu bekommen. Diese Phase wird von der Alltagssprache mit ihren Animismen beherrscht, die Begriffe sind teilweise situationsgebunden, die Sprache hat teilweise experimentellen Charakter.

2. Phase des Erklärens und Formulierens.
Der Verlauf des Experiments, dessen Ergebnis, der erkannte Zusammenhang soll noch immer in der Muttersprache, zugleich aber genau und sachlich ausgedrückt werden. Mit der Sachkompetenz zusammen wird die Sprachkompetenz aufgebaut.

3. Phase der Normierung und Präzisierung.
Hier wird die umgangssprachliche Bedeutung durch die fachliche Definition des Begriffs ersetzt.

Wagenschein - und nicht nur er - versteht also den Prozeß des genetischen Lernens ganz wesentlich als einen sprachlichen Prozeß, weil Denken und Verstehen an Sprache gekoppelt sind und die Differenzierung des Denkens und Erkennens in Wechselwirkung mit der Differenzierung des Sprechens steht.

Dies korrespondiert mit Entwicklungen und Standpunkten

moderner Sprachforschung wie denen neuerer philosophischer Hauptrichtungen, insbesondere der analytischen Philosophie.

So spricht etwa Whorf vom Beherrschen des Denkens durch sprachliche Strukturgesetze und bemerkt:

"...sagt er zugleich- und zu Unrecht -, Denken sei eine ganz klare direkte Tätigkeit, sie sei bei allen vernünftigen Wesen gleich und die Sprache ihr indirekter Ausdruck.
In Wirklichkeit ist das Denken eine höchst rätselhafte Sache, ... daß die Formen des persönlichen Denkens durch unerbittliche Strukturgesetze beherrscht werden, die dem Denkenden nicht bewußt sind. Das Denken selbst geschieht in einer Sprache - und jede Sprache ist ein eigenes riesiges Struktursystem, in dem die Formen und Kategorien kulturell vorbestimmt sind, aufgrund deren der einzelne sich nicht nur mitteilt, sondern auch die Natur aufgliedert, Phänomene und Zusammenhänge bemerkt oder übersieht, sein Nachdenken kanalisiert und das Gehäuse seines Bewußtseins baut." (Whorf 1979, S. 52f)

Solche Vorformung unseres Denkens, Erkennens und damit Lernens durch die Struktur unserer (Mutter-/Alltags-) Sprache kann ein genetischer Lehrgang natürlich nicht übergehen.

In die Philosophie fanden ähnliche Denkweisen schon seit der Evidenzphilosophie Franz v. Bretanos, der als einer der wenigen gilt, die Sprachanalyse vom metaphysischen Standpunkt aus betrieben haben und damit gewissermaßen zum "Urvater" der umfassenden Sprachanalyse der modernen Empiristen und analytischen Philosophie wurde (s. Stegmüller I, $_{6}$1978, S. 39f.), Eingang. Dabei zeigen sich nach der umfassenden Analyse der Alltagssprache und ihrer oft vieldeutigen, kontextabhängigen Begriffe zwei Reaktionen:

Die völlige Ablehnung des Gebrauchs der Alltagssprache und der Versuch ihres Ersetzens durch die Kunstsprache (z.B. einige Positivisten) oder das Akzeptieren ihrer Vieldeutigkeiten als ein wesentliches Element menschlicher Reflexion.

Die konsequenteste Stellung im zweiten Lager nimmt wohl Wittgenstein in seiner zweiten Philosophie ein, wenn er schreibt:

"329. Wenn ich in der Sprache denke, so schweben mir nicht neben dem sprachlichen Ausdruck noch "Bedeutungen" vor, son-

dern die Sprache selbst ist das Vehikel des Denkens.[34])
330. Ist Denken eine Art Sprechen? Man könnte sagen, es ist das, was denkendes Sprechen vom gedankenlosen Sprechen unterscheidet. ..."
(Wittgenstein 1977, S. 168)

Hier soll ganz ähnlich Whorf das für den Denkprozeß konstitutive und schöpferische Element der Sprache hervorgehoben werden, das deutlich macht, daß zwischen Denken und Sprechen kein einseitiges, sondern ein Wechselwirkungsverhältnis besteht. Dieser Gedanke taucht sogar schon im ansonsten ja in Bezug auf die Sprache bekanntlich völlig anders orientierten "Tractatus" auf, wenn Wittgenstein feststellt:

"5.6. Die Grenzen meiner Sprache bedeuten die Grenzen meiner Welt."
(Wittgenstein 1980, S. 89)

Die platonische Vorstellung, jedem Wort müsse auch genau etwas Gedachtes entsprechen, bezeichnet Wittgenstein als metaphysische Fiktion, als logischen Mythos (s. Stegmüller I, $_{6}$1978, S. 566 und Wittgenstein 1977, S. 65, 69), ja, sie gefriert alles Denken, denn

"107. Je genauer wir die tatsächliche Sprache betrachten, desto stärker wird der Widerstreit zwischen ihr und unserer Forderung. (Die Kristallreinheit der Logik hatte sich ja nicht ergeben; sondern sie war eine Forderung.) Der Widerstreit wird unerträglich; die Forderung droht nun, zu etwas Leerem zu werden. - Wir sind aufs Glatteis geraten, wo die Reibung fehlt, also die Bedingungen in gewissem Sinne ideal sind, aber wir eben deshalb auch nicht gehen können. Wir wollen gehen; dann brauchen wir die Reibung. Zurück auf den rauhen Boden!"
(Wittgenstein 1977, S. 77)

Das gilt auch, wie Wittgenstein am Beispiel einiger Folgen und Reihen zeigt (Wittgenstein 1977, S. 92-95, S. 97), für die Mathematik, die ihre eigenen "Sprachspiele" hat, denn

"Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker."
(Wittgenstein 1974, S. 99)

Das durch die Sprache geformte und strukturierte und mit dieser in Wechselwirkung stehende Denken muß jeder sich als genetisch verstehende Lehrgang berücksichtigen. Er muß die

jeweilige Sprache behutsam aufgreifen, damit nicht schon allein über diese ein Bruch entsteht und jede Genese scheitert. Geht man zunächst einmal auf die einfachste Ebene der Morpheme und Symbole, so könnte etwa das Minuszeichen (" -3"als "weg 3") so sehr mit dem Wegnehmen, dem "Abziehen" verbunden sein, daß es bedeutender Umstrukturierungen bedarf, damit einige Schüler -5-3 nicht als -2 berechnen. (s. Kap. 3 und 4)

Aber nicht nur sprachliche Momente bestimmen den genetischen Prozeß, wenngleich Begriffsentwicklung im Mathematikunterricht auch oft rein sprachlich verläuft, auch soziale Momente sind ein wesentlicher Faktor, der von den meisten Vertretern unberücksichtigt blieb.

Schubring hat in diesem Zusammenhang festgestellt, daß die Forderung, die Tätigkeit, die Aktivität des Lernenden in den Mittelpunkt zu stellen, zuletzt zu einer Reduktion der höheren Formen geistiger Prozesse auf Reifungsprozesse führt. Dabei sind die Schule, der Unterricht, die Lehr- und Lernsituation, die pädagogische Beziehung das Milieu, in dem dieser Reifungsprozeß abläuft. Und da das Milieu Schule nicht autonom ist, um alle seine Bestandteile, vor allem das zu vermittelnde Wissen selbst zu produzieren, wird das Schulwissen als Ausfluß des Alltagswissens begriffen. Dies führe aber notwendig zu einer zweiten Form des Reduktionismus, wie er ihn etwa bei Wagenschein zu finden meint, wenn dieser sagt "daß Seltsames aus Selbstverständlichem ohne Rest verstanden werden kann." (Wagenschein 1974, S. 52)

Das genetische Prinzip muß, will es ein Prinzip des Verstehens sein, gleichzeitig gegenständliche, soziale und psychologische Bedingungen berücksichtigen und die Erkenntnisse der jeweiligen Einzelwissenschaften (Fachwissenschaft, Soziologie, Psychologie....) verwenden. Die integrative Charakterisierung Wittmanns (s.o.) und seine Absicht, die Piagetsche Entwicklungspsychologie mit dem genetischen Prinzip in der Mathematikdidaktik in Berührung zu bringen, sind ein Versuch dazu. Ich möchte eines der nach meiner Meinung wesent-

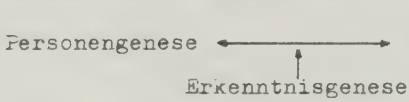
lichsten von ihm herausgestellten Charakteristika des genetischen Prinzips, den Anschluß an das Vorverständnis des Schulers, aufgreifen und seine Bedeutung anhand zweier Lerneinheiten näher beleuchten. Dabei sind ebenfalls gegenständliche, soziale, sprachliche und psychologische Momente im Vorverständnis bedeutsam, aus denen sich wesentliche Bedingungsfaktoren und Anknüpfungspunkte für einen erfolgreichen Lernprozeß ergeben.

Zunächst soll jedoch im nächsten Abschnitt ein aus der Begriffsanalyse folgender Versuch einer eigenen integrativen und systematischen Begriffsbestimmung mit neuer Schwerpunktsetzung unternommen werden.

2.3. Eigene Begriffsbestimmung.

Wie sich in der vorangegangenen Analyse gezeigt hat, vereinigt das genetische Prinzip viele verschiedene von einzelnen Vertretern und deren Sekundärliteratur unterschiedlich gewichtete Funktionen, Prinzipien, Aspekte oder Komponenten.

H. Kronen (Kronen 1968) hat versucht, die verschiedenen wesentlichen "Komponenten" pädagogischer Genese bei Mager systematisch zu unterscheiden und ihren Zusammenhang zu beleuchten. Auch wenn er sich nur auf die Genese im Verständnis Magers bezieht, reicht die Tragfähigkeit seiner Unterscheidung weit über die Person Magers hinaus und ist außerdem am klarsten. Man könnte sie wie folgt darstellen:



Die Erkenntnisgenese stellt den Bezug her zwischen Personal- und Sachgenese. Kronen betont, daß im Verständnis Magers

"...paradoxerweise gerade jene genetische Komponente, die den (genetischen, Anm. des Verf.) Prozeß begründet, der pädagogischen Planung am wenigsten zugänglich (ist) - die Personagenese."
(Kronen S. 109)

Dies hat sich wohl auch nach allen Fortschritten der Entwicklungspsychologie und genetischen Anthropologie bis heute qualitativ nicht verändert. Um hier Boden unter die Füße zu bekommen, braucht das genetische Prinzip zunächst ein diagnostisches Element (s. S. 7). [35)]

Kronen stellt treffend fest

"Die genetische Methode zielt auf Personagenese; aber realiter handelt sie von Sachgenese und von Erkennensgenese (genetischem Verfahren). Die Personagenese ist ihr ideales Moment, ist, was geschehen kann und - möglichst - soll." [36)]
(Kronen S. 108)

Deutlicher kann man das Ungleichgewichtsverhältnis

zwischen theoretischer und unterrichtspraktischer Bedeutung der Hauptaspekte des genetischen Prinzips kaum fassen, und ich sehe hier auch die wesentlichste Ursache für die wechselvolle Geschichte des genetischen Prinzips und die Tatsache, daß sich dieses Prinzip, trotz aller Anerkennung, im Unterricht kaum durchsetzen konnte.

Im Anschluß an die bereits bei Mager angedeutete Unterscheidung und ausgehend von der Unterscheidung bei Wittenberg, der mir von den moderneren mathematikdidaktischen Vertretern die klarste Einteilung andeutet, möchte ich die verschiedenen Funktionen, Prinzipien und Aspekte des genetischen Prinzips wie folgt systematisieren (s. Übersicht):

Übersicht: Prinzipien, Funktionen und Aspekte des genetischen Prinzips bei neueren Vertretern in der Mathematikdidaktik

Das genetische Prinzip enthält drei miteinander verbundene und sich wechselseitig bedingende (also untrennbare) Hauptfunktionen:

1. Die Bildungsfunktion:

Ihr entspricht das erkenntnistheoretische Prinzip, das Wittenberg am deutlichsten als erziehungswissenschaftliche Grundlage herausstellt, das aber auch bei Wagenschein und indirekt bei Wittmann, z.B. als "Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze" genannt wird. Im heuristischen Prinzip oder Aspekt wird der Übergang zum entdeckenden Lernen deutlich.[37] Der hier auch einzuordnende - bei Wagenschein sich zeigende - kausale Aspekt (nach Köhnlein) muß wegen seiner einlinig kausalen Auffassung von Wissenschaftsentwicklung unter modernen erkenntnistheoretischen Gesichtspunkten abgelehnt werden (s. Schubring 1978).

2. Die fachdidaktische Funktion:

Ihr entspricht das Prinzip der Sachgemäßheit, ebenfalls bei Wittenberg und Wagenschein explizit genannt, wenn auch bei Wagenschein vorwiegend in erschließender und motivierender Funktion gesehen (s. pädagogisch-psychologische Funktion, vgl. bei Klafki: Das Elementare). Bei Wagenschein wird die fachdidaktisch selektive und ordnende Funktion im organischen Aspekt (nach Köhnlein, vgl. bei Klafki: Das Exemplarische) deutlicher, nach dem die Sachgebiete als organische Einheiten entwickelt werden müssen und Teile, die das "gestaltende Prinzip" widerspiegeln, herausgestellt werden sollen (s.2.2.).

3. Die pädagogisch-psychologische Funktion:

Ihr entspricht der Anschluß an das Vorverständnis im Sinne internaler Lernvoraussetzungen, von Wittmann und Wittenberg zwar erkannt, aber nirgends näher ausgeführt (s.3.), bei Wittmann und Wagenschein auch Kontinuität bzw.Prinzip der Kontinuität genannt, wobei Wagenschein dieses Prinzip mehr in seiner regulativen Funktion für den Lernprozeß sieht.

In seiner erschließenden Funktion als "pädagogisches Prinzip" (s. Wagenschein, 2.2.) übernimmt es auch Funktionen, die allen drei von mir hier unterschiedenen Bereichen zuzuordnen sind. Die von Wittmann genannte "Zulässigkeit einer informellen Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus" ist schließlich eine nahezu notwendige Folgerung des Versuchs eines Anschlusses an das Vorverständnis und bedarf darüber hinaus noch bei vom Lernenden schon belegten oder mehrfach belegten Begriffen näherer Ausführungen.

Daneben gibt es noch Aspekte des genetischen Prinzips, die quasi eine Brückenfunktion zwischen den drei oben unterschiedenen Funktionen bzw. zwei Funktionen gleichzeitig übernehmen. Auch sind diese Funktionen nicht immer unter allen Gesichtswinkeln typische Implikationen des genetischen Prinzips. So ist die "Einbettung in größere ganzheitliche Problemkontexte inner- und außerhalb der Mathematik"(Wittmann) sicherlich ein Kennzeichen, das nicht nur genetischer Unterricht für sich in Anspruch nimmt und zusammen mit einer "allmählichen Gesichtskreiserweiterung und entsprechender Standpunktverlagerung" (Wittmann) - bei Freudenthal auch "lokales Ordnen" genannt - in Doppelfunktion gleichzeitig allgemeinbildend und fachdidaktisch wirksam. Eine ähnliche Doppelfunktion kommt dem im Wittenbergschen Sinne relativierten "neo"historischen Prinzip zu, nach dem der Lernprozeß manchmal beim (wissenschafts-) historischen Anfang ansetzen sollte.

Der von Köhnlein als "kulturhistorisch"bezeichnete Aspekt, Begriffe aus der Anschauung zu gewinnen und von dort aus eine lückenlose Verstehungskette zu begründen, bildet spätestens seit Mager (s.2.1.) ein wesentliches Charakteristikum des Genetischen und hat ebenfalls eine doppelte, wenn nicht dreifache Funktion inne. Eigentlich ist der "Verzicht auf das Lernen von vorläufig Unverstandenem" nur einer seiner Teilaspekte. Schließlich ist die im individualen Aspekt angesprochene "individuelle" Entwicklung der persönlichen Begabung - wenn auch selten verwirklicht - ein oft gebrauch-

tes Paradigma jeden Unterrichts.

Die oben aufgeführten drei Hauptfunktionen des genetischen Prinzips bei neueren Vertretern in der Mathematikdidaktik sind untrennbar verwoben und somit in gewisser Weise gleichgeordnet. Man kann jedoch je nach Blickwinkel verschiedene Hierarchiesierungen vornehmen, indem man von dem an das didaktische Dreieck erinnernde Dreigestirn[38] von Persona-, Sach- und Erkenntnisgenese nach Kronen (s.S.36) ausgeht:

1. Hierarchie:

Unter bildungstheoretischen Gesichtspunkten sind selbstverständlich die fachdidaktische (als selektive, ordnende) und die pädagogisch-psychologische Funktion der eigentlichen Absicht, den Schüler - an bestimmten Gegenständen und mit Hilfe bestimmter Unterrichtsmethoden – zu "bilden" untergeordnet.

Abgelöst von der bildungstheoretischen Diskussion kann man festhalten, daß jede tiefergehende Begründung des genetischen Prinzips nur in seiner Funktion als "erkenntnistheoretischem Prinzip" gelagert sein kann.

2. Hierarchie:

Andererseits ergibt sich aus dem Ansatz, daß "Erkenntnisgenese" nur durch ein In-Beziehung-Setzen von "Personaund Sachgenese" einsetzen kann, ja sich aus dieser Beziehung - mit allen ihren Ecken und Kanten und ihren (förderlichen) Phasenverschiebungen - speist, die Wichtigkeit von Persona- und Sachgenese.

Mit anderen Worten, "Erkenntnisgenese" lebt aus diesem Beziehungsaspekt, sie ist das Gelingen dieser Beziehung.

3. Hierarchie:

Drittens kann man die Personagenese nicht nur - wie Kronen (S.108) - "als das ideale Moment" (s.S.36) der genetischen Methode sehen, sondern durchaus, umkehrend, als konstituierendes Moment, d.h. als Voraussetzung des Gelingens

von Erkenntnisgenese ansehen. Personagenese muß aber - in welcher Weise auch immer - beim Vorverständnis des Schülers ansetzen. Personagenese bedeutet eigentlich Verwurzelung, "Einwurzelung" (s. Wagenschein), nicht im Sinne von Inbesitznehmen, Anlagern, "Haben", sondern im Sinne von "Sein" (s.E.Fromm, Kap.O) oder - informationstheoretisch gesprochen - gelungenem Einbau in die bereits vorhandene epistemische und heuristische Struktur (s. z.B. Dörner 1976).

Der (Rothschen) Vorstellung, daß durch Rückführung in die Originalsituation die in den Gegenständen investierten "Energien" entbunden und in "produktive Aktivitäten" verwandelt werden - das hieße ja doch in unserem Diagramm ausgehen von der Sachgenese - ist der oben angeführte Anschluß an das Vorverständnis gegenüberzustellen. Denn Energien können nur entbunden werden, wenn

a) die Schüler möglichst weitgehend intern/intrinsisch motiviert sind,

b) der Stoff, die Sache, genügend neue, herausfordernde Momente enthält,

c) andererseits der Schüler sieht, daß er ja dies und jenes schon weiß, d.h., daß er sich hier und im Text/Unterricht wiederfindet.

Die Prüfung und Erfüllung von Punkt c) ist aber notwendige Bedingung für die mögliche Erfüllung von a) und b) und bietet darüber hinaus relativ einfache, handhabbare technologische Ansatzpunkte, die man in folgende Maximen fassen kann:

1. Lerne (im Vortest) jeden einzelnen Deiner Schüler kennen (auch die langsamen, introvertierten, grübelnden..).[39]

2. Lerne Deine Schülertypen kennen, und zwar nicht nach conceptual tempo etc. (das ist nach einigen Monaten vielleicht einschätzbar), sondern nach momentanem Denk-, Modell-, Vorverständnistyp, man könnte sagen "Genesetyp".[40]

Damit haben wir das erste Instrument und gleichzeitig

Element einer "Genese-Technologie", die bestehen würde aus:

1. Einem Vortest zu jeder Lerneinheit, evtl. ergänzt durch eine Befragung.

2. Einem Vergleich der sich hier zeigenden Vorverständnistypen mit der Sachstrukturanalyse, bei der noch die Sachgenese als Planungselement hinzutritt.

3. Einer Unterrichtsplanung auf der Basis der bereits erkannten Personengenese im Vergleich mit der Sachgenese, um Erkenntnisgenese und damit weitere Personengenese zu ermöglichen.

3. Zur Rolle der internalen Lernvoraussetzungen im genetischen Mathematikunterricht

Beleuchtet man die Rolle der internalen Lernvoraussetzungen [41] in den Veröffentlichungen zum genetischen Unterricht und speziell zum genetischen Mathematikunterricht, so fällt auf, wie relativ selten (und wenn, dann wenig konkret) von diesen die Rede ist. Dabei sollte man bei allen nicht nur rein historisch-genetischen Varianten genetischen Mathematikunterrichts annehmen, daß solcher Unterricht in besonderem Maße für sich beansprucht, den Schüler dort abzuholen, wo er steht. Das heißt aber auch vorbegriffliche und begriffliche im Schülerkopf schlummernde Determinanten des Lernprozesses aufzuspüren und aufzugreifen, wozu ein Unterrichtsgespräch im allgemeinen nicht ausreicht. Nur so kann doch wohl echte Genese ansetzen.

Wenn auch bei Wittmann der

> "Anschluß an das Vorverstandnis der Adressaten"
> (Wittmann 1981, S.131)

ausdrücklich als Kennzeichen genetischen Unterrichts genannt wird, so findet man doch an kaum einer Stelle der Veröffentlichungen zum genetischen Prinzip Ausführungen dazu, wie dieses Vorverständnis eingeschätzt werden soll bzw. wie dieser Anschluß an das Vorverständnis konkret erfolgen soll. Wittmann schlägt lediglich vor:

> "Nach dem Vorbild des Freudenthalschen "Gedankenexperiments" soll sich der Lehrer in die intellektuelle Situation der Schüler hineinversetzen. Er soll sich überlegen, welche naiven Vorerfahrungen und welche im Unterricht erarbeiteten Vorkenntnisse die Schüler wohl mitbringen.... Gleichzeitig muß der Lehrer seine Sicht des Themas kritisch daraufhin untersuchen, ob sie stillschweigende Annahmen, Konventionen und mathematische Idiosynkrasien enthält, die nur dem Eingeweihten verständlich sind."
> (Wittmann 1981, S.149)

Wittmann selbst betont, daß es sich hierbei mehr um eine "Haltung" (Wittmann 1981, S.149) des Lehrers handelt, die sicherlich wünschenswert ist. Ob eine Einschätzung des Vorverständnisses aber auf diese Weise gelingen kann, bleibt

sehr zweifelhaft.

Weiterhin unternimmt Wittmann (1981, S.59ff.) den Versuch, die Piagetschen Entwicklungsstufen sozusagen als Stufen des Vorverständnisses, genauer als Stufen der Bereitschaft zur Bildung bestimmter Begriffe in seine Mathematikdidaktik und damit in seine Interpretation des genetischen Prinzips einzubeziehen, was jedoch bei der im Vergleich zur Feinstruktur des mathematischen Curriculums groben Rasterung durch die Piagetschen Stufen nur von sehr begrenzter Reichweite sein kann (s.u.).

In den maßgebenden Schriften Wagenscheins und Wittenbergs zum genetischen Prinzip wird die Einbeziehung internaler Lernvoraussetzungen höchstens als Randbedingung gesehen und dementsprechend allgemein umschrieben. So kann man sie bei Wagenschein in dem Begriff "Einwurzelung" in Anlehnung an Simone Weils "enracinement" sehen, wobei Wagenscheins Begriff die Langeveldsche Vorstellung der genetischen Schichtung[42)] zugrunde liegt. Auch gehört ja bei Wagenschein zum Anschluß an das Vorverständnis organisch das Bemühen um die richtige, altersgemäße Sprache, da diese Beziehungen stiftet und Verständnis - auch Vorverständnis - aufschließt (s. Kap. 2.2.). Dies geschieht allerdings nur bei einigen, am Unterrichtsgespräch besonders aktiv beteiligten Schülern.[43)] Dazu gehört auch, daß die Schüler bei Wagenschein Zeit haben, ihr Vorwissen in einer langen Expositionsphase ohne jeweilige sofortige Prüfung, Korrektur und Umformung durch den Lehrer und in ihrer Sprache einzubringen (s. Wagenschein 1968, S.62).

Ebenso ist in diesem Zusammenhang Wagenscheins Engagement für ein Verbundenbleiben des kindlichen Denkens mit der

"ursprünglichen Wirklichkeit und dem ursprünglichen Denken und Sprechen..."
(Wagenschein 1968, S.93)

nicht zu übersehen, obwohl hier schon Rousseausches Gedankengut - von der natürlichen Vernunft des Kindes - durchschimmert. Diese Vermutung bestätigt sich, wenn man an an-

derer Stelle liest, daß man

"am Anfang eine weittragende Frage, die sich dem unbefangenen, aber wachen Menschen aufdrängt, aus der ruhigen, von Vorkenntnissen nicht geleiteten und auch nicht belasteten, Betrachtung der originalen Sache selbst"
(Wagenschein 1968, S.60)

braucht. Solche Fragen dürften selten sein - in jeder Form von Mathematikunterricht - und man kann sich des Eindrucks nicht erwehren, daß Vorkenntnisse als "belastend" am liebsten ausgeklammert würden. "Weiträumige" Vorkenntnisse, Vorbegriffe und Präkonzepte, die evtl. das didaktische Feld vorstrukturieren oder zumindest auf dieses - und das nicht nur und nicht erst im Unterrichtsgespräch - einwirken sollten (s.u. und Kap.4), um echte Genese zu ermöglichen, würden hier allem Anschein nach gerne umschifft. Dabei gibt es aber nicht nur im Sinne eines Lernens auf Vorrat

"....bereitgestellte Vorkenntnisse..."
(Wagenschein 1968, S.14)

sondern auch internale Lernvoraussetzungen, die aus vorangegangenem Mathematikunterricht und aus ganz anderen Bereichen der Schule oder des sozialen Umfeldes in den Unterricht miteingebracht werden, die oft weniger offensichtlich sind als in anderen Fächern und an denen der Mathematikunterricht dennoch nicht ungestraft vorbeigehen kann.

Deutlicher sieht dies Wittenberg, wenn er in seinem Aufsatz "Genetischer Mathematikunterricht" den herkömmlichen deduktiv orientierten Unterricht als

"ein Filtrat, bestehend aus Definitionen, Lehrsätzen, formalen Beweisen und "Anwendungsaufgaben"
(Wittenberg 1964, S.210) [44]

beschreibt. Er kritisiert, daß solcher Unterricht

"...von der stillschweigenden Annahme ausgeht, daß das Kind am Anfang nichts weiß,sich uber nichts Fragen stellt und daß man ihm alles beibringen muß"
(Wittenberg 1964, S.210/211).

Wittenberg erkennt also wohl, daß der Schüler verwertbares Vorwissen in jeden Lehrgang miteinbringt, ja, daß dieses

Wissen schon echtes mathematisches Vorwissen ist, das man nicht beiseite schieben kann, sondern das den Ausgangspunkt wirklich genetischen Unterrichts bilden muß. Sich auf ähnliche Bemerkungen von A.N. Whitehead[45] stützend, schreibt Wittenberg:

"In Wirklichkeit weiß unser Schüler bereits am Anfang sehr viel".
(Wittenberg 1964, S.212)

und führt als Beispiel an:

"Er hat nicht auf uns gewartet, um zu entdecken, daß geometrische Figuren kongruent sein können, daß sie die gleiche Gestalt haben können, daß eine Größe in Abhängigkeit von einer anderen variieren kann, oder sogar, daß sie mehr oder weniger rasch variieren kann".
(Wittenberg 1964, S.212)

Er folgert:

"Das heißt, daß der Schüler bereits ein beträchtliches Kapital an mehr oder weniger ausgeformten Ideen besitzt, Ideen, die im wesentlichen mathematische Ideen sind. Gewiß, er wird sie oft auf verschwommene, ungefähre, halbbewußte Weise besitzen, wie unsere Vorfahren sie wohl besessen haben mögen. Dies bedeutet, daß er sie auf eine Art besitzt, die potentiell eine Aufforderung ist, sich über diese Ideen klarzuwerden, sie in Ordnung zu bringen, sie auszuführen, sie zu vertiefen und zu erkunden, wohin sie wohl führen mögen; kurz, er besitzt sie auf eine Weise, die eine machtvolle Einladung ist, sich Fragen zu stellen."
(Wittenberg 1964, S.212)

Das Ausgehen von Fragen des Schülers sieht Wittenberg als das Wesentliche genetischen Unterrichts an,[46] deshalb ist solcher Unterricht nicht im einzelnen vorausplanbar:

"Den Gang eines solchen Unterrichts im voraus im einzelnen vorschreiben zu wollen, wäre ein schwerwiegendes Mißverständnis."
(Wittenberg 1964, S.213)

Diese Ansicht deckt sich übrigens völlig mit der Wagenscheins, für den der

"...genetische Lehrgang....immer Dunkelheit vor sich (hat)."
(Wagenschein 1968, S.78)

Das Ausgehen von (allerdings vermeintlichen) Fragen des Schülers wird für Wittenberg in seiner "Themenkreismethode"

verwirklicht, die er in seinem Buch "Bildung und Mathematik" an geometrischen Beispielen vorstellt und die leider bisher in der Mathematikdidaktik zu wenig Beachtung gefunden und Weiterentwicklung erfahren hat. Nun grenzt Wittenberg die Anwendbarkeit dieser Methode von vornherein auf Gebiete ein, die im Schulunterricht vollständig benandelt werden können, was nach seiner Ansicht nur für die ebene Geometrie zutrifft (Wittenberg 1963, S.71). Das begrenzt ihren Wirkungsbereich für den heutigen Mathematikunterricht erheblich, insbesondere im Hinblick auf die von mir betrachteten sonst wohl übereinstimmend als zentral eingeschätzten Lerneinheiten.

Außerdem bleibt es auch bei Wittenberg - ähnlich Wittmann (s.o.) - bei der bloß theoretischen, nirgends empirisch gestützten Vermutung möglicher internaler Lernvoraussetzungen.

Während Wittenberg offenbar die Schwierigkeit des Findens wirklich voraussetzungsloser Themengebiete sieht, wird dies bei Wagenschein an keiner Stelle thematisiert. Man liest die Begrenztheit jedoch unschwer aus der folgenden vollständigen Auflistung genetischer Unterrichtsbeispiele ab, die zeigt, daß bei Wagenschein nur solche Gegenstände zur Illustration genetischen Mathematikunterrichts dienen, die in der Tat recht isoliert sind:

1."Ein Unterrichtsgespräch zu dem Satz Euklids über das Nicht-Abbrechen der Primzahlfolge" (1949) (z.B. in "Naturphänomene sehen und verstehen" [Nsuv] , hrsg. von H.Ch.Berg, S. 228-236). Benötigt außer einem elementaren Primzahlbegriff kaum Vorkenntnisse und interferiert auch kaum mit anderen im Unterricht behandelten Themen.

2."Der antike Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2" (1950) (z.B. in Nsuv, S.237-250). Hier wird sogar in der Einleitung herausgestellt, daß keine Vorkenntnisse notwendig seien.

3."Das exemplarische Lehren als fächerverbindendes Prinzip: der Satz des Pythagoras" (1960) (z.B. in Nsuv, S.251-267).

Auch dies ist mit Wagenscheins eigenen Worten ein Thema, in das "...man ohne Vorkenntnisse hineinspringen und (das) man doch aufklären kann..." (Nsuv, S.251).

4."Mathematik aus der Erde (Geo - metrie)" (1961) (z.B. in Nsuv, S.289-301). Es geht um einen Einstieg zum Strahlensatz uber die Überlegungen des Eratosthenes zur Erdumfangsmessung; stark historisch-genetisch orientiert und deshalb kaum an Vorverständnis des Schülers anknüpfend.

5."Kern und Schale runder Dinge" (1948) (z.B. in "Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken" [UVeD] , Bd. I, S.67-74). Dieser Aufsatz ist lediglich eine Illustration von mathematischen Zusammenhängen zwischen Raumkörpern.

6."Der Sechs-Stern" (1968) (z.B. in UVeD II, S.135-148). Das Problem der Einbeschreibung eines regelmäßigen Sechsecks in einen Kreis wird vor allem im Hinblick auf seine Zurückführbarkeit auf andere, einfachere geometrische Einsichten betrachtet. Vorkenntnisse - etwa über die Winkelsumme im Dreieck - wirken hier geradezu zerstörerisch.

Bei all diesen Beispielen ist die - zumindest nach der Auffassung Wagenscheins - relative Voraussetzungslosigkeit offensichtlich.[47)]

Deutlicher wird die wichtige Bedeutung des Vorverständnisses für den Lernprozeß in letzter Zeit von einigen Physikdidaktikern gesehen, allen voran W. Jung, der mit seiner Arbeitsgruppe eine Reihe von Untersuchungen zu Schülervorstellungen in verschiedenen physikalischen Teilgebieten[48)] durchgeführt hat. Er untersucht dabei im wesentlichen mit Hilfe schriftlicher Tests und Interviews das Vorwissen der Schüler und die Art und Weise, in der Schüler neue Informationen und angebotene Modelle mit bereits vorhandenen vergleichen und in ihre "semantischen Netzwerke" einzubauen versuchen. Eines seiner Ergebnisse besteht darin, daß es hierbei häufig zu Interferenzen (zwischen Alltagswissen und angebotenem physikalischem Wissen) kommt, die das Verständnis erschweren oder unmöglich machen. Jungs Terminologie[49)] und

seine eigenen Hinweise lassen deutlich werden, daß er bei Deutung solcher Vorgänge kognitionspsychologische Informationsverarbeitungsmodelle zu benutzen versucht, die im deutschsprachigen Raum Dörner (s.auch Ende des Kap.) am weitesten entwickelt hat. So spricht Jung davon, daß dem (Anfänger-) Physikunterricht als eine wesentliche Aufgabe die "Umorganisierung" des Alltagswissens zukomme und bedauert in diesem Zusammenhang, daß

"beim traditionellen Unterricht eine intensive Phase der "Auflockerung" des Alltagswissens zu fehlen scheint, in der die Beziehungen zwischen beiden Rahmen[50]) hergestellt und diskutiert werden."
(Jung 1981a, S.435)

Die von den Mitarbeitern Jungs durchgeführten Interviews decken Schwierigkeiten auf,

"die auch gute Schüler haben, Fragen im physikalischen Verständnisrahmen aufzufassen."
(Jung 1981a, S.436)

Jung macht hier also ganz ähnliche Beobachtungen im Bereich des Physikunterrichts wie Teile der vorliegenden Studie für den Mathematikunterricht. Zuviel

"Einüben von Problemlöseschematas"..."kann auch dazu führen, daß die unterschiedlichen Rahmen unverbunden bleiben, sodaß die Schüler bei neuen Problemen wieder in dysfunktionale Rahmen zurückfallen."...Um das zu vermeiden, muß m.E. ein Dialog zwischen den Rahmen stattfinden."
(Jung 1981a, S.438)

Nun unterscheidet sich die Lage im Mathematikunterricht dadurch von der im naturwissenschaftlichen Unterricht, daß die hier benutzten Modelle noch abstrakter sind und ihnen meist noch stärker rein didaktisch - methodische Hilfs-, ja "Krücken"-Funktion zukommt. Deshalb ist es vor allem hier sicher oft wesentlich effektiver, wenn nicht gar unerläßlich, beim Schüler bereits - wenn auch nur ansatzweise - bestehende Modelle aufzugreifen und diese auszubauen, umzuformen oder zu widerlegen, als neue irritationsträchtige Parallelmodelle aufzubauen.

Zum Abschluß dieses Kapitels soll, quasi als Kontrast,

ein Blick auf die Einschätzung der Rolle internaler Lernvoraussetzungen seitens der kognitiven Psychologie geworfen werden.

Zunächst werden einige diesbezügliche Implikationen der Piagetschen Theorie aufgezeigt.

Sodann soll am Beipiel einer der im empirischen Teil verwandten Testaufgaben angedeutet werden, wie selbstverständlich detaillierte Analysen und Darstellungen über den Einfluß des Vorwissens z.B. bei informationstheoretisch orientierten Kognitionspsychologen wie Lindsay/Norman/Rumelhart oder Dörner sind.

Betrachtet man zunächst die Position Piagets zur Rolle der internalen Lernvoraussetzungen in jedem Lernprozeß und speziell in Lernprozessen im Mathematikunterricht, so fallen drei Dinge ins Auge:

1. Jeweilige internale Lernvoraussetzungen in Form vorhandener Schemata und Konzepte, die bei Piaget bestimmte Entwicklungsstufen markieren, spielen in allen Arbeiten Piagets eine wesentliche, wenn nicht die wesentliche Rolle.

2. Im Prozeß der Assimilation des Lerngegenstandes an die Struktur des Lernenden wie in dem der Akkomodation der Struktur auf den Lerngegenstand hin ist selbstverständlich die bereits vorhandene Struktur und sind damit die internalen Lernvoraussetzungen von entscheidender Bedeutung.

3. Der wesentliche Unterschied zwischen dem Interesse Piagets und meinem besteht darin, daß er als Entwicklungspsychologe sozusagen nach dem "natürlichen" Gang der Entwicklung von Lernvoraussetzungen sucht, wobei z.B. der Erwerb bestimmter Invarianzkonzepte wichtige Entwicklungsstufen markiert, während ich vom Standpunkt der empirischen Unterrichtsforschung ausgehe. Von bestimmten Lerneinheiten (in Form vorgegebener Lernzielkataloge o.ä.) aus versuche ich eine Momentaufnahme der für diese Einheit relevanten kognitiven Lernvoraussetzungen zu erhalten, um diese auf Anknüpfungs- und Strukturierungsgesichtspunkte in bezug auf die nach-

folgende Lerneinheit hin zu interpretieren.

Wegen des allgemeinen Charakters der Piagetschen Arbeiten zum Mathematiklernen, die sich im wesentlichen auf Invarianzinterpretationen und eine Herausstellung des Unterschieds zwischen operativem[51)] und formalisierendem Aufbau gründen, sind für die betrachteten Lerneinheiten keine direkt verwertbaren Ergebnisse zu erwarten. Trotzdem ist die Nähe solcher Überlegungen zu bestimmten Aspekten des genetischen Prinzips zu spüren.

Zur Einführung und zum Begriff der negativen Zahl findet man allerdings auch noch einige konkrete Ansatzpunkte. Sie sind im Kapitel I "Die negative Zahl und die Null" der Reihe "Die Entwicklung des Erkennens", Bd.I: "Das mathematische Denken" enthalten.

In diesem Abschnitt stellt Piaget zunächst fest, daß mathematik-geschichtlich gesehen der operative Aspekt der negativen Zahlen wesentlich früher zu datieren sei als der formalisierende und daß dies auch in der kindlichen Genese wirksam werde:

"Der Vergleich der Geschichte der negativen Zahlen mit derjenigen der natürlichen Zahlen ist außerordentlich lehrreich. Vom operativen Standpunkt aus erscheint nichts einfacher, als in Gedanken der ersten Menge eine zweite beizufügen oder wegzunehmen, wenn diese momentan oder definitiv die kleinere der beiden ist. Der reversible Charakter der Addition und der Subtraktion scheint die Vervollständigung der direkten Folge der natürlichen Zahlen notwendig zu machen, durch die inverse Folge der negativen ganzen Zahlen, die aus der Subtraktion $n2 - n1$ resultieren, wenn $n1 > n2$ ist. Die Bedeutung von solchen Operationen ist sogar so allgemein, daß sie nicht nur bei Zahlen auftritt, sondern schon bei den Verneinungen und Abtrennungen von qualitativen Klassen."
(Piaget 1975a, S.109)

Es folgen einige Beispiele aus dem umgangssprachlichen Bereich. Piaget fährt dann kontrastierend fort:

"Wie erklärt sich nun die außerordentliche Tatsache, daß die negativen Zahlen in der Mathematik erst seit der Arithmetik von Diophantos bekannt sind und vor allem seit den Anfängen der Algebra, somit dem Denken der Griechen fremd geblieben waren? Unabhängig von unserer Axiomatik entspra-

chen die beiden Handlungen, die operative und die formalisierende, [52] schon damals zwei sehr verschiedenen Säulen des operativen Aufbaus..."

Piaget erwähnt d'Alembert als Beispiel eines klugen, auch mathematisch denkenden Kopfes, der dennoch

"den Begriff der negativen Größe obskur (fand), trotz der ökonomischen (Schulden) oder geometrischen Modelle (Inversion der Richtung usw.)...."
(Piaget 1975a, S.110)

Er folgert:

"Dieses Zögern des großen d'Alembert ist außerordentlich lehrreich in bezug auf die aktive und statische Natur der negativen Zahlen und der ganzen Zahlen im allgemeinen.... Eine Einheit hinzufügen bildet die positive +1 in derselben Weise, wie das Wegnehmen einer Einheit die negative Zahl -1 aufbaut. Es ist richtig, daß die Wegnahme -1 von einer vorhandenen Menge (z.B. 5-1) nicht mit -1 die Eigenschaft der negativen Zahl zu teilen scheint, sondern auf die Zahl 1 lediglich die Operation der Subtraktion anwendet, während die Wegnahme von -1 von einer Nullmenge[53] eine unmögliche oder rein imaginative Handlung zu sein scheint."
(Piaget 1975a, S.111)

Im folgenden schließt Piaget aus eigenen Untersuchungen, die zeigen, daß entsprechend dem Abstand zwischen operativem und formalisierendem Aspekt der negativen Zahlen ein Kind wesentlich früher die Umkehrung einer Operation und die Inversion einer Ordnung als die Begriffe "positiv" und"negativ" versteht.

Piaget schließt aus dem Beispiel d'Alemberts und den oben erwähnten Untersuchungen darüber hinaus:

"Nun beweisen aber diese Tatsachen nicht nur auf evidente Weise den aktiven [54] Charakter der negativen Zahl, die nicht aus der Wahrnehmung allein herstammt, sondern sie verifizieren darüber hinaus auch die Hypothese eines operativen Charakters der positiven Zahl."
(Piaget 1975a, S.112)

Er stellt abschließend noch einmal heraus:

"Kurz, die negative Zahl attestiert - mehr noch als die positive Zahl - die operative Natur der Zahlen: man kann von den Objekten nicht ihre Abwesenheit abstrahieren..."

Geht man davon aus, daß sich - wie Piaget, wenn auch in

einem etwas allgemeineren theoretischen Rahmen attestiert - der operative Aspekt der negativen Zahl wesentlich früher im Kopf des Schülers einnistet, ja sozusagen im Kind angelegt ist[55)], so werden einige sich nur langsam abbauende Schülerfehlkonzepte, wie sie sich in den Tests zu den ganzen und rationalen Zahlen zeigen, verständlich (s. 4.6.). Dies stützt meine Vermutung, daß durch das beim Schüler vorhandene operative Vorverstandnis des "-" Zeichens möglicherweise auch des "+" Zeichens, das ja bei am Anfang stehenden positiven Zahlen entfällt, haufig auftretende Schülerfehler wie -7-4=-3 bedingt sind. Dabei ist denkbar, daß der Schüler entweder die am Anfang stehende -7 als unmögliche Vorgabe (s.o.) identifiziert, zunächst das "-" Zeichen außer acht läßt und dann beim Ergebnis wieder setzt (-(7-4)) oder daß er modellhaft von 7 DM Schulden etwa 4 DM Schulden"wegnimmt" (nachläßt) ((-7-(-4); assoziatives Übertragen des Schuldenmodells auf die zweite Zahl).

Wenden wir uns nun noch der Sicht dreier wichtiger Vertreter heutiger kognitiver Theorien zu, Dörner und Norman/Rumelhart. Welche Beziehung zwischen Vorverständnis, Denken und Lernen sehen diese Psychologen? Dörner schreibt:

"Die Informationsverarbeitung beim Problemlösen ist untrennbar mit dem Gedächtnis 56) verknüpft. Man könnte sagen, daß sich Denken und Gedächtnis so zueinander verhalten, wie Wellenbewegungen zum Wasser. Das eine ist das Medium, das andere der darin stattfindende Prozeß....Nun ist das Gedächtnis nicht vergleichbar einem System von verschiedenen Wasserbehältern, die verschieden große Kapazitäten haben und zwischen denen durch ein Röhrensystem amorpher "Gedächtnisstoff" hin- und hertransportiert wird. Im Gegensatz zum Wasser ist dieser Gedächtnisstoff vielmehr strukturiert, d.h. er besteht aus unterscheidbaren Elementen, die untereinander in bestimmter Weise verknüpft sind."
(Dörner 1976, S.28/29)

Zur Beschreibung dieser Gedachtnisstruktur benutzt Dörner dann den Norman/Rumelhartschen Begriff "aktives semantisches Netzwerk" (s.auch w.u.). Er fährt fort:

"Lernprozesse bestehen darin, daß einem solchen Netz "Maschen" angefügt werden."
(Dörner 1976, S.30)

An anderer Stelle spricht er auch davon, daß es notwendig sein kann "...das Netz zu verändern und zu erweitern." (Dörner 1976, S.37)

Es kann hier weder die gesamte kognitive Theorie Dörners noch die Norman/Rumelharts auch nur im Abriß dargestellt werden, aber schon dieser kurze Einblick verdeutlicht den engen Zusammenhang, der hier zwischen Vorverständnis (Vorstrukturen), Denken und Lernen gesehen wird: Lernen ist Veränderung und/oder Erweiterung dieser Vorstrukturen.

Zur näheren Darlegung dieses Zusammenhangs soll abschließend noch versucht werden, die (falsche) Lösung der schon weiter oben angeführten Textaufgabe (-7-4=-3) vor dem Hintergrund solcher kognitionspsychologischer Verarbeitungsmodelle zu diskutieren. Der empirisch gestützte Grundbegriff dieser Modelle ist das "aktive strukturelle Netz" (s. Norman/Rumelhart 1978, S.51 ff.) oder das "aktive semantische Netzwerk" (Dörner 1976, S.29), bestehend aus "Knoten", die durch eine Anzahl von "Relationen" miteinander verbunden sind.

"Diese Relationen werden vom Gedächtnissystem dazu verwendet, logische oder semantische Beziehungen zwischen den Knoten zu kodieren."
(Norman/Rumelhart 1978, S.51)

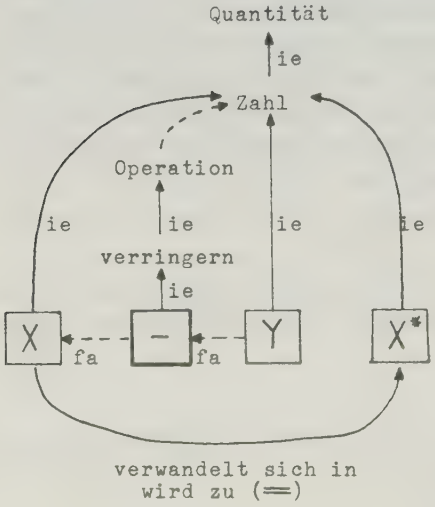
Das Adjektiv

"..."aktiv" bedeutet, daß die Struktur zugleich Datenspeicher und Prozeß ist."
(Norman/Rumelhart 1978, S.51)

D.h. aber: Zum einen sind in solchen Netzwerken "Gedächtnisbilder von Realitätsbereichen" (Dörner 1976, S.35) (in unserem Fall: Subtraktionsaufgaben) organisiert und gespeichert. Zum anderen verlaufen Prozesse beim Lösen von Aufgaben und Problemen entlang vorhandener Netze. Dabei werden in einigen Fällen Netze unverändert benutzt, in anderen Fällen Netze umstrukturiert und/oder erweitert. Damit ist das Vorverständnis ganz selbstverständlich "the most important factor" (s. Ausubel in der Einführung, S.3) im Lernprozeß

(Lösungsprozeß).

Betrachten wir die Aufgabe -7-4=...:
Der Schüler erkennt sie - in diesem Fall über die visuelle Repräsentation - als Subtraktionsaufgabe und ruft ein "Gedachtnisbild" des Bereiches "Subtraktionsaufgaben" ab, die ihm bereits lange geläufig sind (und die mit anderen Gedächtnisbildern vernetzt sind). In Anlehnung an die allgemeine Darstellungsform solcher Gedächtnisbilder bei Dörner (s.Dörner 1976, S.35) kann dies etwa wie in Abb. 1a dargestellt werden.



Konkret-Abstrakt-Relation: "ist ein" (ie)

Ganzes-Teil-Relation: "besteht aus" (ba)

raum-zeitliche Relation: "folgt auf, verwandelt sich in, wird zu..."(fa)

Abb. 1a

Dabei sind bis zum Kennenlernen neuer Zahlbereiche X, Y und X^* Leerstellen für natürliche Zahlen, insbesondere ist es selbstverständlich, daß die Operationen - in diesem Fall die Subtraktion - nicht aus dem Zahlbereich von X (hier $\mathbb{N}$) hinausfuhren. Man könnte dieses Konzept als eine Art elementares "Abgeschlossenheitsprinzip" [57] (den mathematischen

Abgeschlossenheitsaxiomen entsprechend) oder "Erhaltungs/Invarianzprinzip" in bezug auf den Zahlbereich bezeichnen.

Die Fehllösung -7-4=-3 kann nun wie folgt beschrieben werden: Die in nur einem Element (-7) neue Aufgabenstellung wird zunächst als Subtraktionsaufgabe identifiziert und mit dem Gedächtnisbild von Subtraktionsaufgaben verglichen. An dieses Gedächtnisbild (bzw. Netz) werden nun nur (bereits an anderer Stelle vorhandene[58]) Relationen (Abb. 1b) oder eine Konkret-Abstrakt-Relation (Abb. 1c) "angeknüpft".

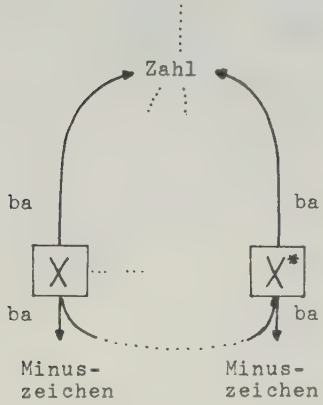


Abb. 1b

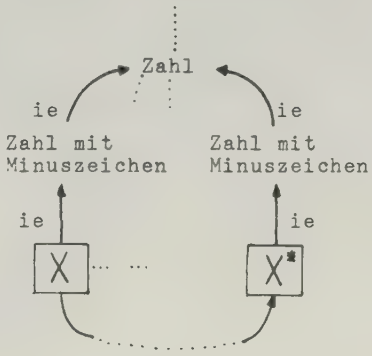


Abb. 1c

Dabei wird wahrscheinlich das von den natürlichen Zahlen her vertraute "Abgeschlossenheitsprinzip" (s.o.) auf die negativen Zahlen übertragen und zunächst nicht auf den neuen Zahlbereich "Ganze und rationale Zahlen" erweitert. Dieses Konzept bleibt dann - nach teilweiser vorläufiger Retusche im Vortest - möglicherweise auch nach durchlaufener Unterrichtseinheit erhalten, dem Unterricht gelingt es also offenbar nicht, das "Subtraktionsnetz" beständig "umzuknüpfen" (entsprechendes gilt für die Addition).

In der Darstellungsform von Norman/Rumelhart könnte das der Fehllösung dieser Aufgabe entsprechende "aktive struk-

turelle Netz" wie in Abb. 2a dargestellt aussehen.

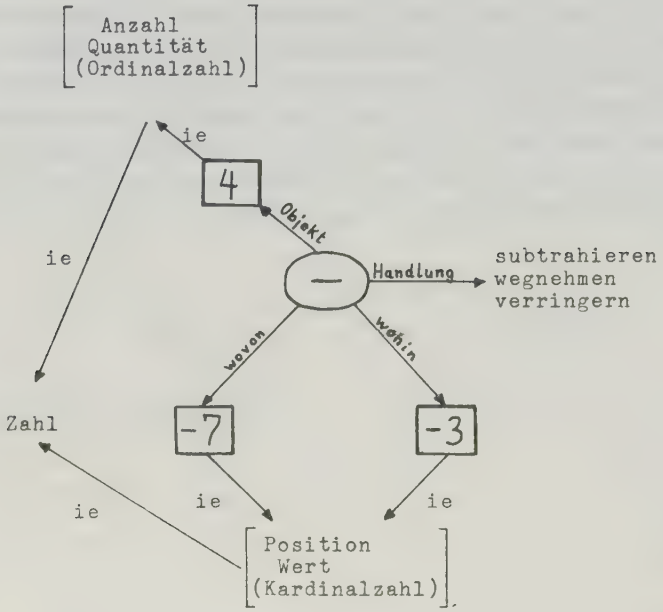


Abb. 2a

Der "Knoten", über den der Zugriff zu diesem strukturellen Netz erfolgt, ist auch hier wieder das Minuszeichen vor der 4, das Subtraktionszeichen. Bei einer Subtraktionsaufgabe, die ganz in den natürlichen Zahlen verliefe, würden die in eckige Klammern gesetzten (Zwischen-) Relationen schon bei der "Anzahl..." zusammenfallen. Um die Aufgabe auf dem Hintergrund seines Vorwissens erfolgreich lösen zu können, muß ein Schüler entweder diese Aufgabe in die Additionsaufgabe (-7)+(-4)=...transformieren und das analog vorzustellende Additionsnetz um negative Kardinalzahlen erweitern oder die -4 in -7-4=... in eine Stellungsänderung ("4 Schritte nach links", d.h. ordinalen und Handlungs-Aspekt miteinander verbinden) transformieren. Nach dieser Transformation, die

quasi eine neue "Zwischenmasche" bildet, "schrumpft" das Netz dann im ersten Fall auf den oberen Teil (Abb. 2b), im zweiten Fall auf den unteren Teil (Abb. 2c).

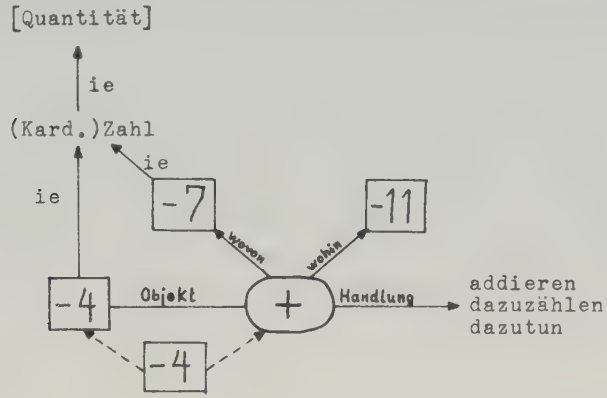


Abb. 2b

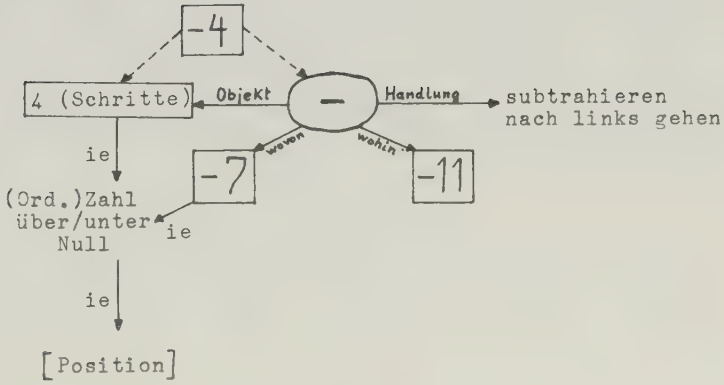


Abb. 2c

Schon dieser kurze kognitionspsychologische Beschreibungsversuch macht exemplarisch deutlich, daß solche kognitiven Modelle Vorverständnis nicht als Randbedingung des Lernens, sondern geradezu umgekehrt als einer neuen Lage (Aufgabe, Problem) durch Veränderung oder Erweiterung anzupassende "Vorstruktur" auffassen.

Ein umfassender Beschreibungsversuch und experimenteller Nachweis der in den Lerneinheiten verwandten strukturellen Netze kann nicht Aufgabe dieser Arbeit sein. Sie bemüht sich vielmehr zunächst nur um eine Evaluation des Umfangs der Vorkenntnisse und einiger einfacher vorstruktureller Elemente, die im Lernprozeß erhalten bleiben.

4. Empirische Studie zur Diagnose internaler Lernvoraussetzungen und ihrem Einfluß im Lernprozeß

4.1. Vorüberlegungen

Bei dem im theoretischen Teil nachgewiesenen Defizit bezüglich der Diagnose internaler Lernvoraussetzungen im Mathematikunterricht als unabdingbarer Voraussetzung und Ansatzpunkt einer Vermittlungsmöglichkeit zwischen Personen- und Sachgenese (s.2.3.) stellt sich nun die Frage, wie solche internalen Lernvoraussetzungen zu ermitteln sind.

Daß dies insgesamt kein leichtes Unterfangen ist, versteht sich; eine Einschränkung auf ein enges Feld ist daher unumgänglich. Zunächst wird aus dem Zusammenhang deutlich, daß ich mich hier auf eine solche Diagnose im Fach Mathematik und auf die Sekundarstufe beschränke, wenngleich einige Ansätze sich teilweise oder sinngemäß auch auf andere Stufen und evtl. auch auf andere Fächer übertragen ließen.[59] Weiterhin beschränke ich mich auf sachbezogene kognitive Lernvoraussetzungen im weiteren Sinne, d.h. z.B. unter teilweiser Einbeziehung umgangssprachlicher Begriffe. Nicht in die Untersuchung einbezogen werden also internale Lernvoraussetzungen aus dem affektiven Bereich, etwa Einstellungen zum Fach, zum Lehrer, zum Mitschüler u.ä., die zwar im Einzelfall bestimmend sein können, im Mittelwert jedoch einen gleichbleibenden Einfluß haben dürften.

Die Grundlage der Diagnose bildet ein zur jeweiligen Lerneinheit entwickelter Vortest, ergänzt durch eine Befragung einzelner Schüler zu einzelnen Aufgaben (näheres s. 4.2., 4.3., 4.5.). Der Versuch einer Ermittlung internaler Lernvoraussetzungen durch rein theoretische Erwägungen oder in einem einführenden Unterrichtsgespräch reicht - wie bereits in 3. ausführlicher begründet - nicht aus. In einem solchen Gespräch äußern sich erfahrungsgemäß nur wenige, meist besonders impulsive oder relativ selbstsichere Schüler und keineswegs ein auch nur annähernd repräsentativer Querschnitt. In einem solchen Gespräch gehen zudem viele

Bemerkungen verloren, die durch sie hindurchschimmernden Vorkonzepte der Schüler werden nur oberflächlich wahrgenommen und nicht festgehalten. Deshalb erscheinen - neben Einzel-Interviews(s.u.) - schriftliche Tests am besten geeignet, die oben eingegrenzten Lernvoraussetzungen zu diagnostizieren. Dabei ist es unumgänglich, daß diese Studie sich auf einige, meist auch in den RRL als solche hervorgehobene, Hauptlernziele zu den entsprechenden Unterrichtseinheiten beschränkt[60]; zum einen aus zeitökonomischen Gründen, zum anderen, weil viele Lernziele im Aufbau eines nicht vorab erfragbaren Begriffssystems bestehen.

Die Testaufgaben wurden, gestützt auf die Erfahrungen aus einer Vorstudie (vgl. 4.3.), so konstruiert, daß eine möglichst eindeutige Fehlertypzuordnung zu bestimmten (falschen) Ergebnissen bestand. Nicht unmittelbar aus dem Ergebnis der jeweiligen Aufgabe eindeutig zu erkennende Fehlvorstellungen wurden durch ergänzende Befragungen einzelner Schüler zu diesen Aufgaben erschlossen.

Das Mittel der Fehleranalyse, ergänzt durch solche Befragungen[61], erscheint aus mehreren Gründen als das hier angemessenste diagnostische Instrument:

1. Es ist nach mehreren Testgenerationen relativ wenig zeitaufwendig, da dann bereits Fehlerkategorienschemata vorliegen[62] (s.4.2.).

2. Das Mittel der Fehleranalyse hat, besonders angewandt auf bestimmte Bereiche des Mathematikunterrichts, eine lange Tradition (s.4.2.), auch wenn diese bis jetzt leider wenig Rückwirkungen auf den Unterricht zeigte.

3. Die Fehlerdiagnose umgeht viele sprachlich und personal vermittelte Probleme der Einflußnahme auf den Probanden und der Aussagendeutung (im Gegensatz zu jeder Form von Interviews).

4. Schon aus der Auswertung solcher Fehleranalysen ergeben sich - wie die Studie zeigt - wesentliche Ansatzpunkte für einen genetischen[63] Mathematikunterricht, da tatsächlich

den Lernprozeß bestimmende und bei Schülern dieser Altersstufe verbreitete sonst verborgene Fehlkonzepte sichtbar werden.

Dabei sollen natürlich auch die Grenzen und Probleme dieses Vorgehens, auch unter Vergegenwärtigung der oben genannten selbst auferlegten Beschränkungen, nicht verwischt werden. Insbesondere besteht ein gewisses Problem in der Konstruktion genügend trennscharfer Aufgaben, d.h. hier eineindeutiger Endergebnis-Fehlertyp-Zuordnung. Eine stärker intervieworientierte Methode wird sicherlich eine tiefergehende Aufklärung von Denkstrukturen einzelner Schüler ermöglichen, allerdings unter beträchtlich größerem Zeit- und Personalaufwand[64)] und Inkaufnahme vieler Einfluß- und Unsicherheitsfaktoren (s.o.).

Von solchen Erwägungen abgesehen sind zwei Haupteinwände gegen die oben beschriebene Methode der Ermittlung internaler Lernvoraussetzungen zu einzelnen Lerneinheiten denkbar:

1. Wirklich stabile Fehlkonzepte bei Eintritt in die Lerneinheit sind so nicht feststellbar, da die Schüler sich, verstärkt durch die Namensnennung beim Test, gedrängt fühlen, Aufgaben zu lösen, die sie sonst gar nicht bearbeitet hätten. Dieser Einwand ist eng mit einem zweiten gekoppelt, den man in die Frage fassen kann:

2. Sind die in einem solchen Vortest festgestellten Fehlkonzepte stabil oder werden sie in nahezu jedem Unterricht - auch ohne sie bewußt aufzugreifen - leicht umgeformt oder abgebaut?

Beide Einwände lassen sich durch folgende Erfahrungen, die dem Vergleich mit einer Vorstudie (s.Anhang) entstammen, größtenteils entkräften:

ad 1. Es ist in der Tat richtig, daß die Schüler nur wenige Aufgaben bei der Bearbeitung ausließen. In der ohne Namensnennung der Schüler durchgeführten Vorstudie (s.Anhang) zeigten sich jedoch prozentual ähnlich geringe Auslassungs-

häufigkeiten. Dabei ist anzunehmen, daß die Schüler hier keinen Anlaß hatten, etwa aus Angst vor Bloßstellung einzelne Aufgaben auszulassen. Außerdem erscheint es auch ausreichend (s. auch ad 2), daß die Schüler ein zumindest auf Anfrage vorhandenes Vorkonzept zeigten, das - wie die Häufungen einzelner Fehlkonzepte und deren Persistenz (s.ad 2.) zeigten - in den meisten Fällen nicht erst spontan aus der Situation heraus entwickelt wurde.

ad 2. Hier deutet ebenfalls schon die Vorstudie an, daß viele Fehlkonzepte relativ stabil sind und - was besonders interessant ist - im Nachtest, einige Wochen nach Beendigung der Lerneinheit, teilweise erneut durchbrachen (s. 4.5., 4.6.): Ein deutlicher Hinweis auf den oft nur kurzfristigen (Schein-) Erfolg unseres herkömmlichen Mathematikunterrichts.

Einwände gegen die als zu klein angesehene Schülerpopulation und die (an statistischen Standards gemessen nicht repräsentative) Stichprobe von nur 4 Klassen an drei Schulen (s.4.3.) sind nicht zu entkräften. Es handelt sich hier jedoch um keine repräsentative Untersuchung, sondern eine explorative Studie, die schlaglichtartig das außerordentliche Defizit an der betrachteten Stelle deutlich machen und Ansatzpunkte für eine echte Genese im Mathematikunterricht eröffnen soll sowie die Notwendigkeit breiterer Untersuchungen nahelegt.

Wie bereits erwähnt, böten sich sicherlich auch andere Methoden der Erforschung internaler Lernvoraussetzungen an, etwa die mehr oder weniger direktiver Interviews, wie sie teilweise von Dahnke, Barz, Riesch und Westphal (Dahnke (Hersg.), 1973) oder von Jung (z.B. Jung 1978, 1981a) bei Untersuchungen zu Lernvoraussetzungen im naturwissenschaftlichen Unterricht verwandt werden. Es muß jedoch noch einmal betont werden, daß - neben dem schon angesprochenen hohen Zeit- und Personalaufwand, verbunden mit schwer kontrollierbaren subjektiven Einflüssen - aus der entstehenden Datenfülle, ja Datenflut, große Auswertungsprobleme resultie-

ren. Die entstehende breite Datenbasis ist nicht nur unter technischen Gesichtspunkten weniger distraktiv, sie erlaubt auch weniger unmittelbar eine Differenzierung in verschiedene Fehlkonzeptkategorien. Aus all diesen Gründen ist jede Interviewmethode, erst recht in der Unterrichtspraxis, kaum als diagnostisches Instrument einsetzbar.

4.2. Zur Methode der Fehleranalyse

Nachdem in den Voruberlegungen versucht wurde darzulegen, daß Methoden der Fehleranalyse, ergänzt durch gezielte Befragungen, den unter Berücksichtigung des Zeitfaktors günstigsten unmittelbar unterrichtlich verwertbaren Zugang zu internalen Lernvoraussetzungen der Schüler bilden, gilt es nun, kurz den momentanen Stand der Forschung zu Fehleranalysen im Mathematikunterricht zu referieren und auf die Fragestellungen der Arbeit zu beziehen. Hierzu lege ich in wesentlichen Teilen die bereits von H. Radatz[65)] geleistete Literaturaufarbeitung zugrunde. Aus dem von bedeutenden Erziehungswissenschaftlern wie Roth oder Klafki[66)] betonten Auftrag der individuellen Förderung jedes Schülers ergibt sich nach Bauersfeld[67)] als zentrale Aufgabe für einen differenzierenden Mathematikunterricht die Relevanz-Diagnose-Passung individueller Unterschiede bzw. der Ursachenerkundung fur Lernschwierigkeiten. Dieser "Problemkomplex", so Radatz,

> "wurde bisher aus einigen Richtungen her bearbeitet, allerdings ohne allzu überzeugende Hilfen und Handlungsanleitungen für die Praxis des Mathematikunterrichts zu entwickeln. Auch die zahlreichen lernzielorientierten Tests und Leistungstests können diagnostische Probleme kaum lösen. Die quantitative Aussage über das Erreichen eines Lernziels (-Fehlerrate-) gibt keine Hinweise auf die möglichen Ursachen einer Lernschwierigkeit bzw. die Gründe für das Ausbleiben einer angestrebten Leistung, deren Kenntnis aber eine notwendige Voraussetzung für die Planung und Auswahl von Förder- bzw. Individualisierungsmaßnahmen ist."
> (Radatz 1980, S.3)

Außer in der oben angegebenen Funktion wird in das Instrument der Fehleranalyse nach Radatz noch von mindestens drei Seiten große Hoffnung gesetzt:

1. "als ein Element der Unterrichtsplanung im offenen Unterricht (u.a. Messner 1978),"
2. "als ein kognitionspsychologisches Untersuchungsinstrument (u.a. Birkhan 1978) und ...."
3. "als ein möglicher Zugang zu neuen Erkenntnissen über den mathematischen Lehr-Lern-Prozeß (u.a. Shulman auf

der AERA-Tagung 1978)."
(alle Zitate: Radatz 1980, S. 4,5)

Momentan wird - wenn überhaupt - Fehleranalyse fast ausschließlich als Voraussetzung zur Therapierung von Schulerfehlern benutzt, ein Zustand, den auch Radatz hinzunenmen scheint, ja sogar indirekt als Idealzustand preist, wenn er schreibt:

"Man sollte sich bewußt sein, daß die medizinische Idealstufung "Diagnose - Therapie, Rezept...- Heilung" so wie in der Medizin selbst auch bei Lernschwierigkeiten und Fehlleistungen im Unterricht nicht immer möglich sein wird."
(Radatz 1980, S. 67)

"Fehler"-Analyse muß aber bereits vor Eintritt in eine neue Unterrichtseinheit betrieben werden, um empirisch (und nicht nur am Schreibtisch, s. Kap.3) die den Schüler nindernden ebenso wie die schon den Keim zu neuen Begriffen, Operationen etc. in sich tragenden Vorkenntnisse und Präkonzepte zu diagnostizieren und Unterricht daraus mit zu entwickeln. Zwar hat Radatz recht, wenn er es als "Illusion" ansieht

"..,anzunehmen, mit Hilfe irgendeiner didaktischen Methode oder eines Prinzips alle Schülerfehler vermeiden zu können..." (Hervorhebung des Verfassers)
(Radatz 1980, S. 67)

andererseits darf Diagnose - um im obigen Bild zu bleiben - nicht erst am Krankenbett, ja oft Sterbebett geschehen, sondern muß bereits präventiv vor dem Übergang zur nächsten größeren Lernstufe erfolgen und somit zum selbstverständlichen Element der Planung von Mathematikunterricht werden. Geschieht Diagnose nicht in dieser Form, d.h. so frühzeitig wie möglich - natürlich auch unterrichtsbegleitend - so wird man mit Radatz auf die Feststellung zurückgeworfen, daß

"Die Dauerhaftigkeit bzw. Persistenz von Fehlertecnniken bei vielen Schülern sehr groß (ist). Ohne Erkennen und angemessenes Reagieren durch den Mathematiklehrer können Fehlertechniken und fenlerhaftes Verständnis mathematischer Sachverhalte bei den Schülern über mehrere Schuljahre hinweg wirksam bleiben bzw. sich verfestigen!"
(Radatz 1980, S. 72)

In der Tat sind viele Fehlertypen sehr beständig, das bestätigt auch die vorliegende Studie, aber - und das ist der wesentliche, bisher von allen Seiten übergangene Gesichtspunkt - die Schwierigkeiten dafür liegen bereits (modisch informationstheoretisch gesprochen) vor der "Informationsaufnahme". Die"Informationen" (das sind konkrete Begriffe, Modelle, modellhafte Kalküle, Handlungsschemata...) können nicht internalisiert werden, weil der Lernende keine Bezüge zu seinen schon vorhandenen Denkstrukturen (Vorkenntnissen, Präkonzepten) erkennt[68)] und deshalb vermutlich zwar oft parallele Begriffssysteme etc. aufbaut, diese jedoch häufig ungenutzt läßt oder später (einige Wochen nach der Lerneinheit) wieder zu den früheren zurückkehrt. Daraus kann man nur die Konsequenz ziehen, daß "langzeitwirkender"Unterricht unbedingt von den Vorkenntnissen und Präkonzepten der Schüler ausgehen muß. Um diese zu ermitteln, stehen, angewandt auf vor einer neuen Leineinheit präsentiertes Aufgabenmaterial unteren und mittleren Schwierigkeitsgrades, im Prinzip die gleichen methodischen Ansätze und Verfahren wie bei der Fehleranalyse zur Verfügung, d.h.:

1. schriftliche Arbeiten
2. informelle und diagnostische Interviews
3. "lautes Denken"
4. Beobachtung während der Bearbeitung von Aufgaben im Unterricht.

Aus den schon in 4.1. näher dargelegten Gründen wähle ich die Diagnose über schriftliche Arbeiten, ergänzt durch stichwortartig protokollierte diagnostische Interviews zu einzelnen Aufgaben.

Die Methode der Fehleranalyse hat vor allem im Fach Mathematik bereits eine lange Tradition, deren Wurzeln in der dem Schüler zugewandten Reformpadagogik der 20er Jahre einerseits und der stärker werdenden empirischen psychologischen Forschung kurz nach der Jahrhundertwende andererseits zu suchen sind. Für die Psychologen bildeten und bilden vor

allem elementare arithmetische Operationen ein wegen der relativ einfachen und überschaubaren Strukturen beliebtes Forschungsfeld. Allerdings können die bisherigen recht zahlreichen Arbeiten auf diesem Gebiet wenig Hilfen bei der Konstruktion und Auswertung von Tests zur Diagnose und Umformung internaler Lernvoraussetzungen bieten, da

1. Die Kategorisierung der Fehlertypen rein summarisch und damit relativ oberflächlich bleibt[69] und dem Prozeßcharakter (der "Genese") des Fehlererwerbs und der Fehlerentwicklung kaum[70] gerecht wird.
2. Das vorhandene Testmaterial nicht auf eine Diagnose vor Eintritt in den aktuellen Lernprozeß abgestimmt ist.

Deshalb war ich bei der Konstruktion der Testaufgaben wie bei der Auswertung und Typologisierung der Fehler weitgehend auf selbsterarbeitete Ansätze angewiesen, was sicherlich mancherlei Anfangsschwächen und -schwierigkeiten zur Folge hat.

4.3. Die Durchführung der Studie

Ausgehend von den obigen Überlegungen und den durch verschiedene Faktoren, insbesondere zeitliche und schulische Faktoren, begrenzten Möglichkeiten einer solchen Untersuchung gestaltete sich das methodische Vorgenen der empirischen Studie wie folgt:

Anknüpfend an den theoretisch postulierten Einfluß des Vorverständnisses der Schüler auf deren Lernprozeß, vor allem bei Lerneinheiten in unteren und mittleren Klassen, wurde im Schuljahr 1979/80 eine Vorstudie zur Lerneinheit "Ganze und rationale Zahlen" in einer 7. Klasse eines Gymnasiums durchgeführt. Diese Lerneinheit wurde ausgewählt, da sie einerseits für die gesamte Sekundarstufe wichtiges Rüstzeug schafft, andererseits die Methode der Fehleranalyse hier wegen der relativ wenigen Rechenschritte besonders gut zu greifen versprach. Die Tests der Vorstudie enthielten jeweils 19 Items (s.Anhang), die Vorstudie bestand, um die Entwicklung und den Einfluß des Vorverstandnisses zu explorieren, aus Vortest, Schlußtest und Nachtest. Die Auswahl der Items wurde von zwei Seiten bestimmt:

1. Die Items stützten sich auf die Hauptlernziele der für diese Schule gültigen hessischen Rahmenrichtlinien (s.Kap. 4.4.1.).

2. Die mögliche Komplexität der Aufgaben wurde dadurch begrenzt, daß der Aufgabentext bzw. die Darstellung der Aufgaben und die Aufgabenstellungen ja vom durchschnittlichen Schüler schon im Vortest, d.h. vor Eintritt in die Lerneinheit, erfaßbar sein mußten. Deshalb beschränkte sich schon die Vorstudie zu den ganzen und rationalen Zahlen im wesentlichen auf die vier Grundrechenarten und einfache Bruchdarstellungen von Divisionsaufgaben. Gänzlich wurde auf Aufgaben verzichtet, bei denen das Distributivgesetz (sicher eine ergiebige Fehlerquelle), Beträge oder Gleichungen Verwendung finden.

Der Vortest wurde den Schülern unangekündigt unmittel-

bar vor Beginn der neuen Lerneinheit in Form hektographierter Blätter mit Platz für jeweilige Rechnungen und Ergebnisse mit der Bitte vorgelegt, durchgeführte Rechenschritte aufzuschreiben. Die Bearbeitungszeit betrug 25 Minuten, Zeitmangel wurde in keinem Fall beobachtet, deshalb wurde diese Zeitvorgabe auch bei den folgenden Tests beibehalten.

Die bei der Korrektur ermittelten Fehler und deren Häufigkeiten sowie der relative Anteil der richtigen Lösungen wurden wie in der Tabelle im Anhang dargestellt notiert und gleichzeitig auf dem Schülerblatt durch "✓" (richtig), "f" (falsch) oder "⌐" (Auslassung) gekennzeichnet. Jede richtig gelöste Aufgabe erbrachte einen Punkt.

Die Schüler erhielten die korrigierten und mit einer Gesamtpunktzahl bewerteten Aufgabenblätter in der nächsten Stunde zur Einsichtnahme zurück, danach wurden diese zur weiteren Auswertung wieder eingesammelt.

Der nachfolgende Unterricht ging nicht von den im Vortest sichtbar gewordenen Vorstellungen und Fehlern der Schüler aus, sondern orientierte sich - der normalen Unterrichtssituation entsprechend - weitgehend an dem in der Schule eingeführten Lehrbuch "Mathematik Heute 7" (Athen, Griesel; Ausgabe 1976) mit gestrafftem Durchlaufen einzelner Teile.

Der Schlußtest erfolgte zwei Fachstunden vor der diese Einheit abschließenden Klassenarbeit, ein Zeitpunkt, zu dem die Schüler im allgemeinen ein relatives Leistungsmaximum erreichen.

Der Nachtest wurde etwa 10 Wochen nach Abschluß der Lerneinheit durchgeführt. Anlage und Durchführung dieses Tests waren aus Gründen der Vergleichbarkeit weitgehend identisch mit dem Vortest. Lediglich die Zahlenwerte in den einzelnen Aufgaben wurden im Schlußtest leicht abgeändert, um unmittelbare Gedächtniseffekte auszuschalten. Ebenso wurde die Anordnung der Aufgabentypen leicht abgewandelt, um Reihenfolgeeffekte zu vermeiden, die Anordnung der Aufgabengruppen zu den einzelnen Grundrechenarten jedoch beibehalten.

Bei der Veränderung der Zahlenwerte lag besonderes Augenmerk darauf,daß der Schwierigkeitsgrad möglichst genau dem der alten Aufgaben entsprach, etwa die gleichen Zehnerüberschreitungen nötig waren oder die Ergebnisse in der gleichen Größenordnung lagen. Mögliche leichte Unterschiede im Schwierigkeitsgrad lassen sich jedoch nicht ausschließen. Im Nachtest wurden dann wieder die gleichen Aufgaben und Anordnungen wie im Vortest verwandt, da ein großer zeitlicher Abstand zwischen Vor- und Nachtest lag.

Die beschriebene Testanordnung hat sich im wesentlichen bewährt. Die Auswahl der Aufgaben legte hinreichend viele Fehlertypen der Schüler offen, die Fehleranalyse gestaltete sich im allgemeinen problemlos und gestattete überraschende Einblicke in die Lernprozesse der Schüler. Trotzdem waren die Ergebnisse wegen der geringen Schülerpopulation und der starken Prägung einzelner Klassen durch den Fachlehrer selbst für eine explorative Studie nicht hinreichend aussagekräftig.

Deshalb wurde eine entsprechende Testserie im Schuljahr 1981/82 in vier 7. Klassen - drei Klassen eines Gymnasiums und einer Gymnasialklasse einer additiven Gesamtschule - noch einmal durchgeführt. Entwurf, Durchführung und Auswertung entsprachen in groben Zügen der Vorstudie, wurden jedoch aus den in der Vorstudie gewonnenen Erfahrungen heraus wie folgt abgeändert:

1. Bei der Konstruktion der Aufgaben wurde noch genauer darauf geachtet, daß aus den jeweiligen falschen Ergebnissen eindeutig auf einen bestimmten Fehlertyp geschlossen werden konnte.

2. Aufgaben zur Anordnung in den ganzen Zahlen wurden hinzugenommen, ebenso Additions- und Subtraktionsaufgaben, die von der"Null" ausgehen, da diese Zahl als Angel- und Symmetriepunkt der Zahlengeraden im Denken der Schüler eine gewisse Rolle spielt,[71)] außerdem eine Aufgabe (-5+8), bei der man aus dem negativen in den positiven Zahlbereich gelangt.

3. Die beiden zusätzlichen Fragen bzw. Aufforderungen "Was stellst Du Dir unter -12 (-14, -13) vor?" sowie "Erkläre den Unterschied zwischen +3 (+4, +5) und -3 (-4, -5). Wenn Du möchtest, kannst Du ein Beispiel benutzen." sollten weitere Aufschlüsse über die vorhandenen Schülermodelle bringen. Sie wurden ans Ende des Tests gestellt, damit sie - wenn überhaupt - möglichst nur durch die Lösung der Aufgaben beeinflußt wurden und nicht umgekehrt der Lösung der Aufgaben eine mögliche Reflexion der benutzten Modelle voranging. Dieser neue Testteil erwies sich vor allem im Vergleich mit den durchgeführten Rechnungen und den dabei benutzten Modellen als fruchtbar (s. Auswertung und Schlußfolgerungen).

4. Um den Einfluß direkter Gedächtnisleistungen völlig auszuschließen, wurden auch im Nachtest Zahlenwerte und Reihenfolgen variiert.

5. Wegen des erweiterten Umfangs wurden die Auswertungen von Vor-, Schluß- und Nachtest in getrennten Tabellen dargestellt und innerhalb dieser Tabelle auch für die einzelnen Klassen aufgeführt, um auffällige Abweichungen zwischen einzelnen Klassen kenntlich zu machen.

6. Zusätzlich zu den Tests erfolgten nach der Auswertung des Vortests kurze ergänzende mündliche Befragungen von je etwa 5 bis 10 Schülern jeder Klasse zu besonders interessanten oder nicht eindeutig zu klärenden Fehlern. Um eine mögliche Beeinflussung der Schüler zu vermeiden, wurde dabei lediglich die Frage "Wie hast Du diese Aufgabe gerechnet?" gestellt. Die meist sehr kurzen Kernaussagen der Schüler wurden stichwortartig protokolliert.

Schüler, die bei einem oder zwei Tests fehlten, mußten aus Gründen der Vergleichbarkeit aus der Auswertung herausgenommen werden. Hierdurch verringerte sich der Umfang der Untersuchung von ursprünglich 123 Schülern auf 103.

Außerdem wurde der Studie zur Erweiterung des Spektrums eine zweite Lerneinheit (Zuordnungen) hinzugefügt. Diese

ebenfalls fundamentale Lerneinheit, die der früheren "Schlußrechnung" oder dem "Zwei- und Dreisatz" entspricht, wurde als ein gewisser Kontrast zur anderen Lerneinheit ausgewählt, da hier Textaufgaben aus verhältnismäß alltäglichen Situationen eine wesentliche Rolle spielen.[72)]

Die Konstruktion der zugehörigen Testbatterie wurde von zur ersten Lerneinheit analogen Gesichtspunkten geleitet, d.h. verständliche Aufgabenstellung, insbesondere Vermeidung von Fachausdrücken, Berücksichtigung des gültigen Lernzielkataloges (s. auch 4.4.1.), Ausschaltung unmittelbarer Gedächtnisleistungen durch Variation von Aufgabenstellung und -anordnung unter gleichzeitiger Wahrung der Vergleichbarkeit.... Dies gestaltete sich insgesamt bei der Lerneinheit "Zuordnungen" schwieriger, sowohl in bezug auf die Aufgabenerstellung als auch die Fehlerauswertung (s.4.6.). Da ein wesentliches Ziel dieser Lerneinheit in der Lösung von Textaufgaben aus dem Bereich der Schlußrechnung besteht, war es hier wesentlich schwieriger, vergleichbare Aufgaben zu finden. So fungieren z,B. in jeder Textaufgabe andere Wörter als Schlüsselreize und beeinflussen hierdurch allgemein über die Semantik des Textes das Lösungsverhalten.[73)] Deshalb wurde auch bei der Variation der Textaufgaben auf möglichst ähnlichen Satzbau geachtet. Lediglich die Zahlenwerte bei einer solchen Aufgabe zu verändern, erschien jedoch nicht ausreichend, da dann beim Schluß- und Nachtest ein deutlich besseres Textverständnis sowie mit diesem Text assoziierte Lösungsstrategien zu erwarten wären. Auch würden so zufällige Übereinstimmungen zwischen Aufgabensprache und Lösersprache möglicherweise zum vorrangig bestimmenden Faktor. Auf der anderen Seite würde eine völlige Veränderung der Textaufgaben in den Zahlenwerten, in der Semantik, Syntax und Pragmatik einen Vergleich zwischen Vor-, Schluß- und Nachtest unmöglich machen. So wurden als mittlerer Weg zum einen die Zahlenwerte geändert, zum anderen durch eine geänderte Wortwahl bei möglichst gleichartiger Textstruktur die oben diskutierten Nachteile unter Wahrung der Vergleich-

barkeit zu minimieren versucht.

Die gerade angedeuteten Probleme müssen außerdem selbstverständlich bei der Auswertung berücksichtigt werden.

4.4. Lernzielkataloge und Testbatterien zu den untersuchten Lerneinheiten.

Die nachfolgenden Lernzielkataloge zu den untersuchten Lerneinheiten weisen die Lernziele aus, deren Erreichen in den jeweiligen Testbatterien überprüft wurde. Die Lernziele sind wörtlich den für die beteiligten Schulen geltenden Stoffplänen/Lernzielkatalogen, d.h. den hessischen Rahmenrichtlinien (RRL) entnommen, Einfügungen mit [....] , Auslassungen mit (....) gekennzeichnet. Die Numerierung der einzelnen Lernziele wurde, um deren Auffinden in den vollständigen Lernzielkatalogen zu erleichtern, ebenfalls aus diesen RRL übernommen. Zwecks einfacher Codierung für die Zuweisung der verwandten Testaufgaben zu den Lernzielen wurden alle Lernziele mit eckigen, hinter jedes Ziel gesetzten Klammern durchnumeriert.

4.4.1. Lernzielkataloge

4.4.1.1. Lernzielkatalog zur Lerneinheit "Ganze und rationale Zahlen" (RRL, Kap. 15)

1. "Ganze Zahlen und Zustände"

(1) Aus der Umwelt Beispiele angeben können, bei denen Zustände symmetrisch auf einen Grundzustand (gekennzeichnet durch 0) bezogen werden [1] .

(2) Wissen, daß zur Kennzeichnung eines derartigen (symmetrisch auf einen Grundzustand bezogenen) Zustandes zwei Angaben, z.B. Betrag und Vorzeichen, erforderlich sind [2] .

(4) Einem vorgegebenen Zustand den zugehörigen Punkt einer Geraden zuordnen können und umgekehrt [3] .

(5) Wissen, daß es zu jedem derartigen Zustand jeweils genau einen Zustand ("Gegenzustand" genannt) gibt, der gleichen Betrag und entgegengesetztes Vorzeichen wie der gegebene Zustand besitzt [4] .

(6) Zu einem vorgegebenen Zustand den zugehörigen Gegenzustand angeben können [5] .

(7) Wissen, daß die Bildpunkte von Zustand und Gegenzustand vom Bezugspunkt 0 gleichen Abstand besitzen und auf verschiedenen Seiten von 0 liegen [6] .

2. "Ganze Zahlen und additive Operatoren"

(1) Den Opererator (die Handlungsanweisung) angeben können,

durch den ein vorgegebener Anfangszustand in einen vorgegebenen Endzustand überführt wird [7] .

) Wissen, daß zur Kennzeichnung eines solchen Operators zwei Angaben, z.B. Betrag und "Vorzeichen", erforderlich sind [8] .

) Wissen, daß der Betrag des Operators den Abstand der betreffenden beiden Bildpunkte (von Anfangs- und Endzustand) auf der Geraden angibt [9] .

4)Auf einen vorgegebenen Anfangszustand einen vorgegebenen Operator anwenden können [10] .

6)Wissen, daß es zu jedem Operator jeweils genau einen Gegenoperator gibt, der die Wirkung des gegebenen Operators aufhebt [11] .

7)Wissen, daß Operator und Gegenoperator den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Vorzeichen besitzen [12] .

8)Zu einem vorgegebenen Operator den Gegenoperator angeben können [13] .

4)Operatoren ordnen können [13a] .

."Ganze Zahlen - Addition und Subtraktion"

) Wissen, daß man eine ganze Zahl mit dem Vorzeichen "+" ("-") als positive (negative) ganze Zahlen bezeichnet [14] .

) Wissen, daß man eine ganze Zahl auf zwei Arten verwenden kann: zur Kennzeichnung eines Zustandes und zur Kennzeichnung eines Operators [15] .

) Ganze Zahlen addieren können [16] .

0)Zu einer vorgegebenen ganzen Zahl die Gegenzahl (bezüglich der Addition) angeben können [17] .

5)Ganze Zahlen subtrahieren können [18] .

9)Wissen, daß einer ganzen Zahl ein Punkt der Zahlengeraden zugeordnet ist [19] .

0)Den Zusammenhang kennen zwischen der Kleiner-Relation zwischen ganzen Zahlen und der Relation "liegt links von" zwischen den entsprechenden Bildpunkten [20] .

1)Vorgegebene ganze Zahlen nach der Kleiner-Relation ordnen können [21] .

."Rationale Zahlen"

) Rationale Zahlen addieren und subtrahieren können [22] .

."Multiplikation und Division von ganzen (rationalen) Zahlen

) Die Regeln über Vorzeichen und Betrag für diese Verknüpfung von ganzen Zahlen kennen und anwenden können [23] .

(11)Die Regeln für die Multiplikation rationaler Zahlen kennen und anwenden können [24].

(19)Rationale Zahlen dividieren können [25].

4.4.1.2. Lernzielkatalog zur Lerneinheit "Zuordnung zwischen Größenbereichen" (RRL, Kap. 13)

1."Darstellungsarten"

(4)Eine Zuordnung zwischen Größen zweier Größenbereiche, die in Form einer Tabelle gegeben ist, in einem Nomogramm oder als Punktmenge im Koordinatensystem darstellen können [26].

(6)Aus der graphischen Darstellung einer Zuordnung Punkte auswählen und ihre Koordinaten in Tabellenform aufschreiben können [27].

2."Proportionale Zuordnungen"

(3)Wissen, daß bei proportionalen Zuordnungen dem $\frac{n}{m}$fachen der ersten Größe das $\frac{n}{m}$fache der zweiten Größe zugeordnet wird [28].

(9)Für eine durch ein Größenpaar bestimmte proportionale Zuordnung zu einer vorgegebenen Komponente die andere Komponente berechnen können [29].

(13)Aus Tabellen erkennen, daß bei einer proportionalen Zuordnung die Quotienten der Maßzahlen einander zugeordneter Größen gleich sind (Quotientengleichheit der Zahlenpaare [30].

(15)Für eine durch ein Größenpaar bestimmte proportionale Zuordnung zu einer vorgegebenen Komponente die andere Komponente mit Hilfe der Quotientengleichheit berechnen können [31].

(16)Aus Tabellen erkennen, daß bei einer proportionalen Zuordnung die Maßzahl der zweiten Größe aus der der ersten Größe durch Multiplikation mit einem bestimmten konstanten Faktor (Proportionalitätsfaktor) entsteht [32].

(21)Für eine durch ein Größenpaar bestimmte proportionale Zuordnung zu einer vorgegebenen Komponente die andere Komponente durch Ermittlung des Proportionalitätsfaktors k und Anwendung der Zuordnung $x \mapsto kx$ berechnen können [33].

3."Antiproportionale Zuordnung"

(3)Wissen, daß bei antiproportionalen Zuordnungen dem $\frac{n}{m}$fachen der ersten Größe das $\frac{m}{n}$fache der zweiten Größe zugeordnet wird [34].

(8)Für eine durch ein Größenpaar bestimmte antiproportionale Zuordnung zu einer vorgegebenen Komponente die andere Komponente berechnen können [35].

(11) Aus Tabellen erkennen, daß bei einer antiproportionalen Zuordnung die Produkte der Maßzahlen einander zugeordneter Größen gleich sind (Produktgleichheit der Zahlenpaare [36] .

(13) Für eine durch ein Größenpaar bestimmte antiproportionale Zuordnung zu einer vorgegebenen Komponente die andere Komponente mit Hilfe der Produktgleichheit berechnen können [37] .

(14) Aus Tabellen erkennen, daß man bei einer antiproportionalen Zuordnung die Maßzahl der zweiten Größe als Quotienten aus einer Konstanten und der Maßzahl der ersten Größe erhält [38] .

4.4.2. Testbatterien

4.4.2.1. Testbatterie zu"Z/Q" und Lernzielzuordnung

Vortest "Ganze und rationale Zahlen"

Schreibe bitte jeweils Deine vollständige Rechnung auf:

(1.) $3-7=$	(12.) $(+3)-(+5)=$
(2.) $-8+3=$	(13.) $(-4)-(+7)=$
(3.) $-7-4=$	(14.) $(-4)+(-3)=$
(4.) $4-10+2=$	(15.) $2\cdot(-3)=$
(5.) $\frac{1}{2}-3=$	(16.) $(-4)\cdot 3=$
(6.) $0-5+3=$	(17.) $(-5)\cdot(-2)=$
(7.) $-1,5-0,3=$	(18.) $(-\frac{1}{2})\cdot(-2)=$
(8.) $-2,1+0,4=$	(19.) $\frac{-6}{2}=$
(9.) $0-3-8=$	(20.) $(-8):4=$
(10.) $-5+8=$	(21.) $5:(-10)=$
(11.) $(-3)-(-5)=$	(22.) $\frac{-12}{-4}=$

Streiche jeweils das falsche Kästchen durch:

(23.) -17 ist [größer] [kleiner] als -14

(24.) $+11$ ist [größer] [kleiner] als -13

(25.) $+12$ ist [größer] [kleiner] als $+16$

(26.) 0 ist [größer] [kleiner] als -15

(27.) Was stellst Du Dir unter -12 vor? (Erklärung oder Beispiel oder...)

(28.) Erkläre den Unterschied zwischen $+3$ und -3 . Wenn Du möchtest, kannst Du ein Beispiel benutzen.

Schlußtest "Ganze und rationale Zahlen"

Schreibe bitte jeweils Deine vollständige Rechnung auf:

(1.) $-8-5=$	(12.) $(-5)+(-4)=$
(2.) $4-7=$	(13.) $(+2)-(+6)=$
(3.) $-7+3=$	(14.) $(-3)-(+7)=$
(4.) $5-11+2=$	(15.) $3\cdot(-5)=$
(5.) $0-6+4=$	(16.) $(-6)\cdot 3=$
(6.) $\frac{1}{2}-4=$	(17.) $(-\frac{1}{3})\cdot(-3)=$
(7.) $-1,4-0,3=$	(18.) $(-4)\cdot(-2)=$
(8.) $-2,2+0,6=$	(19.) $(-10):5=$
(9.) $-5+7=$	(20.) $\frac{-8}{2}=$
(10.) $0-4-9=$	(21.) $\frac{-15}{-3}=$
(11.) $(-2)-(-5)=$	(22.) $4:(-8)=$

Streiche jeweils das falsche Kästchen durch:

(23.) $+12$ ist [größer] [kleiner] als -15

(24.) $+11$ ist [größer] [kleiner] als $+14$

(25.) -19 ist [größer] [kleiner] als -16

(26.) 0 ist [größer] [kleiner] als -13

(27.) Was stellst Du Dir unter -14 vor? (Erklärung oder Beispiel oder...)

(28.) Erkläre den Unterschied zwischen $+4$ und -4. Wenn Du möchtest, kannst Du ein Beispiel benutzen.

Nachtest "Ganze und rationale Zahlen"

Schreibe bitte jeweils Deine vollständige Rechnung auf:

(1.) $3-8=$	(12.) $(+3)-(+7)=$
(2.) $-7-5=$	(13.) $(-6)+(-4)=$
(3.) $-6+4=$	(14.) $(-5)-(+8)=$
(4.) $4-12+3=$	(15.) $(-5)\cdot 3=$
(5.) $\frac{1}{2}-5=$	(16.) $2\cdot(-4)=$
(6.) $0-7+5=$	(17.) $(-4)\cdot(-3)=$
(7.) $-2{,}2+0{,}4=$	(18.) $(-\frac{1}{4})\cdot(-4)=$
(8.) $-1{,}5-0{,}4=$	(19.) $\frac{-6}{3}=$
(9.) $-4+7=$	(20.) $(-9):3=$
(10.) $0-5-9=$	(21.) $6:(-12)=$
(11.) $(-3)-(-4)=$	(22.) $\frac{-16}{-4}=$

Streiche jeweils das falsche Kästchen durch:

(23.) $+11$ ist [größer] [kleiner] als $+16$

(24.) -18 ist [größer] [kleiner] als -15

(25.) $+12$ ist [größer] [kleiner] als -14

(26.) 0 ist [größer] [kleiner] als -17

(27.) Was stellst Du Dir unter -13 vor? (Erklärung oder Beispi
oder...)

(28.) Erkläre den Unterschied zwischen $+5$ und -5 . Wenn Du möch
test, kannst Du ein Beispiel benutzen.

Lernzielzuordnung zur Testbatterie "Ganze und rationale Zahlen"

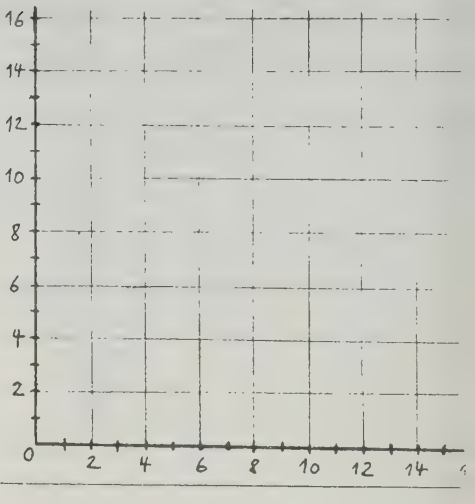
Aufg.-Nr. VT	ST	NT	Aufgabentyp	zugeordnete Lernziele (s.4.4.1.1.)
1	2	1	3-7	1o,18
2	3	3	-8+3	1o,16
3	1	2	-7-4	1o,18
4	4	4	4-1o+2	1o,16,18
5	6	5	$\frac{1}{2}$-3	1o,22
6	5	6	0-5+3	1o,16,18
7	7	8	-1,5-0,3	22
8	8	7	-2,1+0,4	22
9	1o	1o	0-3-8	1o,18
1o	9	9	-5+8	1o,16
11	11	11	(-3)-(-5)	18
12	13	12	(+3)-(+5)	18
13	14	14	(-4)-(+7)	18
14	12	13	(-4)+(-3)	16
15	15	16	2·(-3)	23,24
16	16	15	(-4)·3	23,24
17	18	17	(-5)·(-2)	23,24
18	17	18	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)$	23,24
19	2o	19	$\frac{-6}{2}$	23,25
2o	19	2o	(-8):4	23,25
21	22	21	5:(-1o)	23,25
22	21	22	$\frac{-12}{-4}$	23,25
23	25	24	Entscheiden ob -17 -14	21
24	23	25	" " " +11 -13	21
25	24	23	" " " +12 +16	21
26	26	26	" " " 0 -15	21
27	27	27	Vorstellung von -12	1,2,3,14,19,2o
28	28	28	Unterschied zw. +3 und-3	1,4,5,6,11,12

4.4.2.2. Testbatterie zu "Zuordnungen" und Lernzielzuordnung

Vortest Zuordnungen

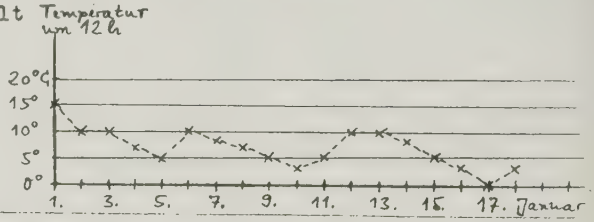
(1.) Stelle die Tabelle im nebenstehenden Gitternetz dar:

1	5
2	4
3	0
5	1
6	3
10	4
12	8
15	13



(2.) Lies ab, wie kalt es am 12.Januar war.

°C



(3.) Versuche, ein System in der jeweiligen Tabelle zu erkennen und trage dann die fehlenden Zahlen ein. Schreibe Deine Rechnung daneben auf.

(a)

10	3
20	6
60	18
80	24
100	
120	

(b)

10	24
20	12
30	8
40	6
60	
120	

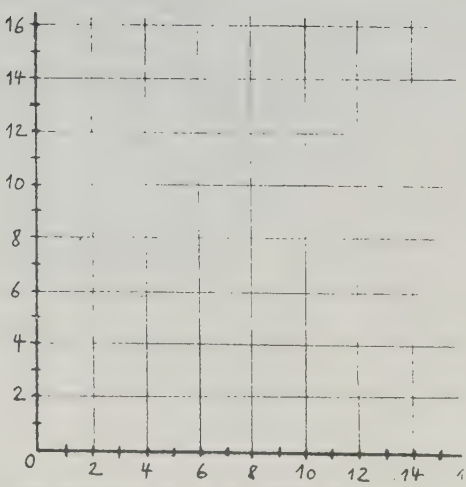
(4.) Ein Auto verbraucht bei einer Fahrstrecke von 450km 36ℓ Benzin. Wie hoch ist der Verbrauch auf 100km?(Rechnung!)

(5.) Ein Fuhrunternehmer soll 240m³ Erde abtransportieren. Mit 18Fuhren hat er schon 108m³ Erde abgefahren. Wieviel Fuhren sind für den Rest erforderlich?(Rechnung!)

Schlußtest Zuordnungen

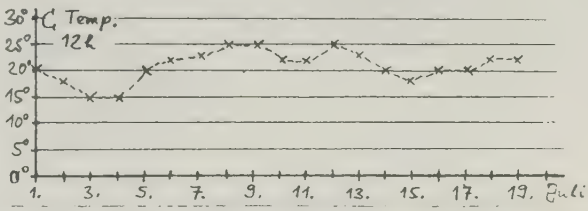
(1.) Stelle die Tabelle im nebenstehenden Gitternetz dar:

1	3
2	6
3	4
4	8
6	6
10	10
12	11
15	14



(2.) Lies ab, wie warm es am 14. Juli war.

°C



(3.) Versuche, ein System in der jeweiligen Tabelle zu erkennen und trage dann die fehlenden Zahlen ein. Schreibe Deine Rechnung daneben auf.

(a)

10	36
20	18
30	12
40	9
60	
120	

(b)

10	4
20	8
60	24
80	32
100	
120	

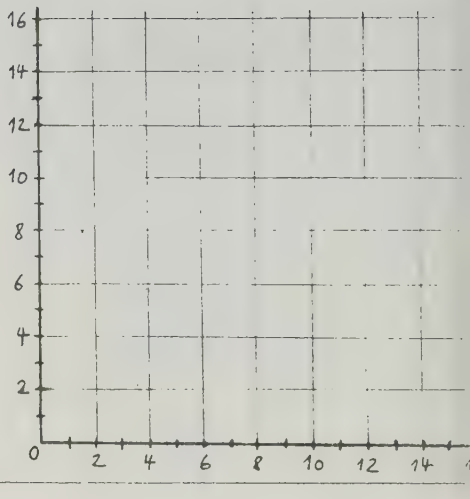
(4.) 35kg Farbe kosten 56DM. Wieviel müßten 10kg der gleichen Farbe kosten?(Rechnung!)

(5.) Ein Bagger soll einen 56m langen, gleichmäßig breiten und tiefen Graben ausheben. Nach 4 Stunden hat er 24m geschafft. Wie lange braucht er voraussichtlich noch für den Rest? (Rechnung!)

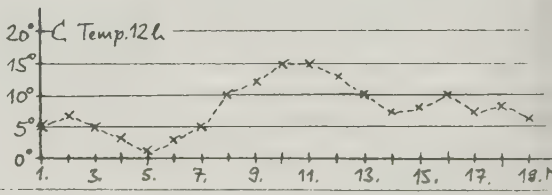
Nachtest Zuordnungen

(1.) Stelle die Tabelle im nebenstehenden Gitternetz dar:

1	6
2	3
3	10
5	4
6	0
10	6
12	8
15	13



(2.) Lies ab, wie kalt es am 16. März war.



(3.) Versuche, ein System in der jeweiligen Tabelle zu erkennen und trage dann die fehlenden Zahlen ein. Schreibe Deine Rechnung daneben auf.

(a)

10	2
20	4
60	12
80	16
100	
120	

(b)

10	48
20	24
30	16
40	12
60	
120	

(4.) 25kg Reinigungsmittel kosten 60DM. Wieviel müßten 10kg des gleichen Reinigungsmittels kosten?(Rechnung!)

(5.) Eine Kelterei soll 280t Äpfel keltern. Nach 15 Stunden sind 105t Äpfel gekeltert. Wieviel Stunden sind für den Rest erforderlich?(Rechnung!)

Lernzielzuordnung zur Testbatterie "Zuordnungen"

Aufg.-Nr. VT	ST	NT	Aufgabentyp	zugeordnete Lernziele (s.4.4.1.2.)
1	1	1	Umsetzen einer Tabelle in einen Graphen im Gitternetz	26
2	2	2	Ablesen aus einem Graphen	27
3a	3b	3a	Fortsetzen einer proportionalen Zuordnung	(28),29,(30 31,32)
3b	3a	3b	Fortsetzen einer antiproportionalen Zuordnung	(34),35,(36, 37,38)
4	4	4	Textaufgabe zur proportionalen Zuordnung (Dreisatz)	29, *)
5	5	5	Textaufgabe zur proportionalen Zuordnung (Dreisatz mit Differenzbildung)	29, *)

*) Das Lösen von Textaufgaben und die dabei speziell angestrebten Lernziele sind an keiner Stelle ausdrücklich erwähnt. Textaufgaben gehören jedoch selbstverständlich besonders zu dieser Lerneinheit, ja sie bildeten und bilden als "Dreisatzaufgaben" sogar deren Zentrum.

4.5. Fehleranalysen und ergänzende Befragungen.

4.5.1. Überblick

Die folgenden Analysen wurden, wie schon aus 4.1. und 4.3. hervorgeht, im Bereich zweier Lerneinheiten der 7.Klasse durchgeführt und sind auch demgemäß gegliedert:

1. Ganze und rationale Zahlen (4.5.2.)
2. Zuordnungen zwischen Größenbereichen (4.5.3.)

Nach der Rohauswertung jeder einzelnen Klasse in Form einer Punktbewertung und einer Fehlerhäufigkeitstabelle wurden die Fehlertypen und deren absolute Häufigkeiten für die Gesamtpopulation (N=103 bzw. N=99) in einer Gesamt-Fehlerhäufigkeitstabelle zusammengefaßt, die jeweils am Anfang der hier aufgenommenen Analysen steht.

Es folgen die Gesamt-Kenntnisprofile für die einzelnen Teststufen (Vortest (VT), Schlußtest (ST), Nachtest (NT)).

Daran schließt sich in halbtabellarischer Form eine Auflistung und Interpretation der häufigsten Fehler in den einzelnen Aufgaben an, bei den Vortests in zweifelhaften Fällen durch Befragungen der betreffenden Schüler gestützt. In einigen Fällen sind solche nachträglichen Kommentare der Schüler (in Klammern und Anführungszeichen gesetzt) bei der Beschreibung des Fehlertyps in die Tabelle mit aufgenommen.

Eine Übersicht der Häufigkeitsentwicklung der wichtigsten Fehlertypen bildet jeweils den Abschluß.

Erst im Kapitel 4.6. werden die Ergebnisse von 4.5. interpretiert und unmittelbar auf die Hypothesen 1 und 3 bezogen.

Zur Ergänzung sind als weitere Belege einige Einzelfallstudien in halbtabellarischer Form in den Anhang aufgenommen worden. Diese geben die individuelle Fehler- und Modellentwicklung bei einigen ausgewählten Schülern wieder und kommentieren sie kurz.

4.5.2.1. Gesamt-Fehlerhäufigkeiten Vortest "Ganze und rationale Zahl

N=103

Aufgabe Nr.	Aufgabe \ Fehler / Anzahl	A (27)	B (21)	C (29)	D (26)	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A	B	C
1	3-7	Γ				4				-7				0				1				5				-6		
		1				2				1						1				1				1			1	
2	-8+3	Γ				-11				1				5				-4				-7						
						5	1	4	4		1	1				1			1				1					
3	-7-4	Γ				-3				-12				0,01				11				-2						
				1	1	6	3	7	8	1				1						1			1					
4	4-10+2	Γ				-8				8				-3				-12				-7				-6		
				3	1	13	4	3	6		1	2	3		3			1		1				1			1	
5	$\frac{1}{2}-3$	Γ				2 1/2				-1,5				-7,5				-2				2				15		
		2	1	3	1	3		1					2		1		1	1				1						
6	0-5+3	Γ				-8				8																		
		1				7	2	4	7			1	2															
7	-1,5-0,3	Γ				-1,2				1,2				1,8				8,2				-0,8				5,2		
			2	5		8	4	9	11	1	2			1	1			1							1		1	
8	-2,1+0,4	Γ				-2,5				2,5				1,7				-3,7				8,3				-1,8		
		1	2	3		7	2	8	5				2			1	1	1				1					1	
9	0-3-8	Γ				5				-5				-15				11				0,01				13		
		1			1	5	4	7	2	1			2		1	1					1	1						
10	-5+8	Γ				-13				1,3				-14				-3										
				1		5	1	5	4	1				1							1							
11	(-3)-(-5)	Γ				-8				-2				8														
		5	3	2	1	16	13	20	13	2	2		1		1	1	3											
12	(+3)-(+5)	Γ				-8				2				8				7				-12						
		1		3		1			3	1	1	1		1	1				1				1					
13	(-4)-(+7)	Γ				3				-3				4				0,01				-12				11		
		4	1	9	2	14	14	13	9	4	1		2				2	1							1			1
14	(-4)+(-3)	Γ				-1				7				-0,01				-8				-4				13		
		1	1	3		4	4	8	10		2	1	1	1							1		1				1	
15	2·(-3)	Γ				3				0,6(2/3)				4				1,4				8				-9		
		1	1	7			1	3	2	1		1		1				1							1			
16	(-4)·3	Γ				8				-8				1,3(4/3)				12				18				1,8		
		1	2	6		1	1	4	3				3	1		1			1	1			1			1		
17	(-5)·(-2)	Γ				-10				5				-2,5				30				-49				0,40		
		2	2	10	1	23	12	14	17		3					2		1				1				1		
18	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)$	Γ				-1				1/2				-0,5				-0,25				4				0,40		
		2	2	17	2	21	10	5	16		3		1	2						2			1		1	1		
19	$\frac{-6}{-2}$	Γ				-12				-2				-4				3				12				-1/3		
		4	5	12		1	3	2	4	3					1		2		1	1		1				1		
20	(-8):4	Γ				-32				2				-24				-0,5				0,05				32		
		4	2	9		1		2	2			1	2	2				1				1						
21	5:(-10)	Γ				-2				0,5				-50				50				-5				0		
		10	5	20	3	10		4	7		4	1	2			2	3	1	1		2	1			2	1	1	
22	$\frac{-12}{-4}$	Γ				-3				48				2				-48				-36						
		2	6	15		22	10	7	17	1		1	1		1		1	1						1				
23-26	Anordnung in Z	Γ				(23) -17>-14				(24) +11 13				(25) +12<+16				(26) 0<-15										
						3	5		2				2	1	1		2		1		2							
27	Vorstellungen und Modelle	Γ				Thermo.				Konto.				Zahlenger.				Gegenzahl				op. Aspekt				Spannung		
						5	11	10	2	5	3	5	9	6	1	5	8	1		1	3	4				1		
28	Unterschied zwischen +3 und -3	Γ				s. 27				(auch)anders																		
						19	16	19	19	8	5	10	7															

					⌐ Anz.	⌐ %	f. Anz.	f. %	Aufgabe Nr.
					1	1,0	7	6,8	1
							19	18,4	2
					2	1,9	28	27,2	3
6					3	2,9	40	38,8	4
					7	6,8	11	10,7	5
					1	1,0	23	22,3	6
					7	6,8	40	38,8	7
3					6	5,8	30	29,1	8
	-0,9 1				2	1,9	28	27,2	9
					1	1,0	18	17,5	10
					11	10,7	71	68,9	11
					4	3,9	11	10,7	12
1					16	15,5	63	61,2	13
					5	4,9	34	33,0	14
1	2 1	14 1			9	8,7	16	15,5	15
					9	8,7	18	17,5	16
7 1	-12 1	40 1			15	14,5	78	75,7	17
5	-2 1	-2,5 1	-0 1		23	22,3	67	65,0	18
					20	19,4	18	17,5	19
6 1	0,5 1				15	14,6	15	14,6	20
1	gilt nicht 1				38	36,9	44	42,7	21
					23	22,3	63	61,2	22
							23: 10, 24: 2	25: 4, 26: 3	23-26
piegel v./n. Chr.	1	Mehrfachbelegungen 1 4 6 2			31	30,0			27
									28

	A	B	C	D
MW (P.)	18	18	17,7	17,7
	17,8			
a (P.)	2,6	3,1	3,4	3,0
	3,0			
r (P.)	13	17	15	12
	14,3			

a: mittlere Abweichung
r: Spannweite

<u>4.5.2.2.</u> Gesamt-Fehlerhäufigkeiten Schlußtest "Ganze und rationale Z

N=103

Auf-gabe Nr.	Fehler Anzahl / Aufgabe	A 27	B 21	C 29	D 26																					
1	-8-5	┌				-3				3				-12				13								
						6	1	4		1	2				2					1						
2	4-7	┌				3				-2																
							3						1													
3	-7+3	┌				-10				4				10				-5								
						1	3	1	1	3						1					1					
4	5-11+2	┌				-8				4				8												
						1	5			3							1									
5	0-6+4	┌				-10				10				2				0								
						1	1	1	1			1	2	1		1				1						
6	$\frac{1}{2}-4$	┌				-4 1/2				3 1/2				-1/2				-1/8				-7/4				-1
		1					2	2			1				1				1				1			
7	-1,4-0,3	┌				-1,1				1,7				1,1												
						1	7	2	4	1		2			1	2										
8	-2,2+0,6	┌				-2,8				1,4				2,8												
						2	5	3	5		3	5				1										
9	-5+7	┌				-12				12				-2												
						1	1	1	2			1				1										
10	0-4-9	┌				5				-11				3				13				-5				-12
						3	2			2					2					1	1			1	1	
11	(-2)-(-5)	┌				7				-7				-3												
		1				2	2	5	6	1	1	3	3			1										
12	(-5)+(-4)	┌				9				-1				1												
			1				1	1	4			1	1				1									
13	(+2)-(+6)	┌				4				-8				8				-10								
			1					1	2		1		1		1						1					
14	(-3)-(+7)	┌				4				-4				10				5								
			1			1	5	1	4		1	4	1			1	1				1					
15	3·(-5)	┌				15																				
			1						1																	
16	(-6)·3	┌				-24				-2																
			1			1							1													
17	$(-\frac{1}{3})\cdot(-3)$	┌				-1				0,9				3				-3/9				1/7				
		1	1	2			1	5	1	1		2		1	1			1					1			
18	(-4)·(-2)	┌				-8																				
			1			2	1	1	3																	
19	(-10):5	┌				2				-2,5				-10 1/5												
						1	1					1					1									
20	$\frac{-8}{2}$	┌				+4				-16				-2				-4 1/2								
		1		1		1			2	2				2							1					
21	$\frac{-15}{-3}$	┌				-5				3				45				-18				5 1/3				
						2	1	1	3		1	1	1	2						1					1	
22	4:(-8)	┌				-2				2				-1/5				-4 1/8								
				1		1		3	2			1	2			1					1					
23-26	Anordnung in Z	┌				(23) +12<-15				(24) +11>+14				(25) -19>-16				(26) 0<-13								
							1		1			1	1				1				1					
27	Vorstellungen und Modelle	┌				Konto.				Zahlenger.				Thermo.				Gegenzahl				Wasserstand				Spannun
		1	4	9	3	18	7	9	9	15	3	4	14	11	9	7	3	1	2	1	7	1		1		1
28	Unterschied zwischen +4 und -4	┌				s. 27				(auch)anders																
						21	11	24	18	6	10	5	8													

	⌐ Anz.	⌐ %	f. Anz.	f. %	Aufgabe Nr.
			17	16.5	1
			4	3,9	2
			11	10.7	3
			10	9,7	4
			10	9,7	5
-0,1 1; 2,5 1; 2/4 1	1	1,0	13	12.6	6
			20	19.4	7
			24	23.3	8
			7	6,8	9
-15 1			15	14,6	10
	1	1,0	24	23.3	11
	1	1,0	9	8,7	12
	1	1,0	7	6,8	13
	1	1.0	20	19.4	14
	1	1,0	1	1.0	15
	1	1,0	2	1,9	16
	4	3,9	14	13,6	17
	1	1,0	7	6,8	18
			4	3.9	19
	2	1,9	7	6,8	20
			14	13,6	21
	1	1,0	11	10,7	22
			23: 2, 24: 2, 25: 1, 26: 1		23-26
...tdruck; Mehrfachbelegungen 16 3 4 10	17	16,5			27
					28

	A	B	C	D
MW (P.)	26,3	24,1	24,4	24,7
	24,9			
a (P.)	1,4	2,7	2,3	3,2
	2,4			
r (P.)	8	10	11	11
	10			

a: mittlere Abweichung
r: Spannweite

4.5.2.3. Gesamt-Fehlerhäufigkeiten Nachtest "Ganze und rationale Zah

N=103

Aufgabe Nr.	Aufgabe \ Fehler Anzahl	┌ A (27)	┌ B (21)	┌ C (29)	┌ D (26)	Fehler	A	B	C	D	Fehler	A	B	C	D	Fehler	A	B	C	D	Fehler	A	B	C	D	Fehler	A	B	C	D	Fehler	A	B	C	D
1	3-8					5		1			-4				1																				
2	-7-5			1		-2	4	1	4	4	-13	1	1		1	12			3		2			3											
3	-6+4					-10	2	1	7	3	2	1				-12	1																		
4	4-12+3			2		-11	2	2	2		11	1	1			-9	1				-3		1												
5	$\frac{1}{2}-5$					4,5	2	1	1		5		1			-3 1/2			1																
6	0-7+5					-12	3	1	3	2	-13	1		1		12		1			2			1											
7	-2,2+0,4		1			-2,6	6	1	5	5	1,8	1				-1,1		1																	
8	-1,5-0,4		1			-1,1	3	1	7	4	1,9			2	1	1,1			1																
9	-4+7					-11	4	1	5	2	-3		1		2																				
10	0-5-9			1		4	4	2	5	2	14			2	1	-4				1															
11	(-3)-(-4)					7	3	1	2	3	-7	2	1	4	2	-1			1	1	-12			2											
12	(+3)-(+7)					4	1	1	1	1	-7		1			-10			1																
13	(-6)+(-4)					-2	2		5	3	10			4	2	2	1																		
14	(-5)-(+8)					3	4		7	2	-3		2	1		13			2		-12	1													
15	(-5)·3					15			1																										
16	2·(-4)					8	3		4		16			1																					
17	(-4)·(-3)			1		-12	3	6		4	+4				1																				
18	$(-\frac{1}{4})\cdot(-4)$	2	1	8		-1	2	3		5	4	1	1	1		5	1				5	1				1/16	1				-17/		1		
19	$\frac{-6}{3}$		1	5		2	2	2	1																										
20	(-9):3	1	1	1		3		2	2		-27	1				1	1																		
21	6:(-12)	1	2	3		-2	4	1	5	2	1/2	2	3		1	-1/6		2			2	1				-6	1				6		1		
22	$\frac{-16}{-4}$	1	2	3		-4	2	4	1	4																									
23-26	Anordnung in Z					(23) +11>+16		1	2	3	(24) -18>-15		1		1	(25) +12<-14		1		1	(26) 0<-17		1	1	1										
27	Vorstellungen und Modelle		1			Zahlenger.	13	7	14	14	Thermo.	11	13	12	4	Konto.	17	6	3	10	Gegenzahl	1			10	Wasserstand	1	1			Luftdru			1	
28	Unterschied zwischen +5 und -5		1			s. 27	21	18	26	15	(auch)anders	6	3	3	11																				

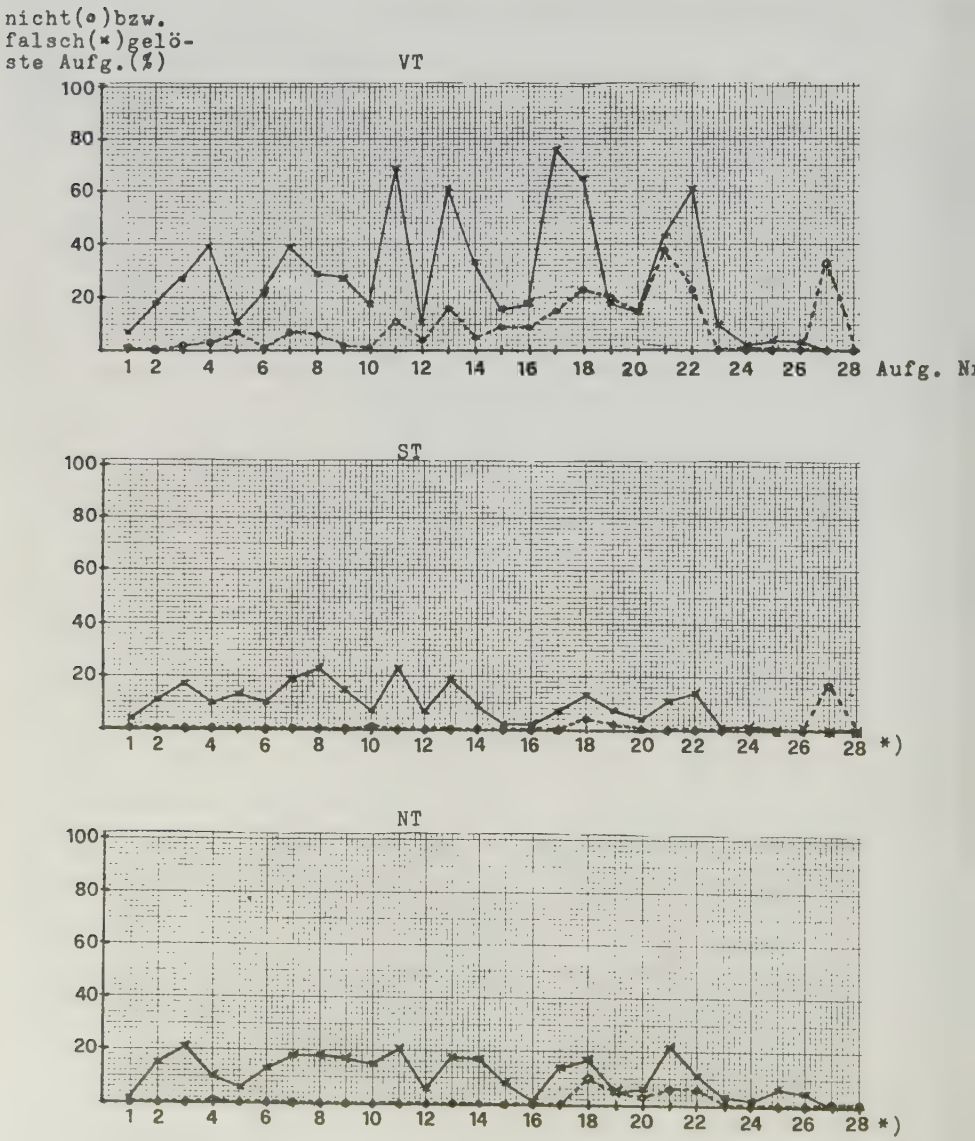
	r. Anz.	r. %	f. Anz.	f. %	Aufgabe Nr.
			2	1,9	1
	1	1,0	22	21,4	2
			15	14,6	3
	2	1,9	10	9,7	4
			6	5,8	5
			13	12,6	6
	1	1,0	19	18,4	7
	1	1,0	19	18,4	8
			15	14,4	9
	1	1,0	17	16,5	10
			22	21,4	11
			6	5,8	12
			17	16,5	13
			19	18,4	14
			1	1,0	15
			8	7,8	16
	1	1,0	14	13,6	17
	11	10,7	17	16,5	18
	6	5,8	5	4,9	19
	3	2,9	6	5,8	20
	6	5,8	23	22,3	21
	6	5,8	11	10,7	22
			23 24 25 26		23-
			6 2 2 3		26
	1	1,0			27
	1	1,0			28

Abschreibungen 1 1 2

	A	B	C	D
MW	24,9	24,9	22,4	25,4
(P.)	24,4			
a	2,4	2,9	4,4	2,1
(P.)	3,0			
r	14	14	17	11
(P.)	14			

a: mittlere Abweichung
r: Spannweite

4.5.2.4. Gesamt-Kenntnisprofile VT,ST,NT Z/Q



*) Zur besseren Vergleichbarkeit wurde den Aufgabentypen im Vortest entsprechend umgeordnet.

4.5.2.5. Auflistung und Interpretation der häufigsten Fehler in den einzelnen Aufgaben zu VT Z/4

Aufg. Nr.	Fehler-quote (%)	Fehlertyp (und Fehlkonzept)	rel. Fehler-qu. (%)	Parallel-fehler-typ in Aufg.Nr.
1	6,8	3-7=4 (3-7=7-3=4) (Kommut. bei Diff.)	28,6	2a
2	18,4	a) -8+3=-11 "-8 und noch 3 weniger" "-8 und 3 dazu"	73,7	3,4a,6 7,8,10
		b) -8+3=(+)8-3=5 (Vorzeichentausch)	5,3	
3	27,2	-7-4=-3 "-4 weg von -7" "bei -4 habe ich wieder zur Null hin gerechnet"	85,7	(2a....) 7,9,11
4	38,8	a) 4-10+2=-6+2=-8	65,0	2a....
		b) 4-10+2=10-4+2=6+2=8	15,0	1.....
5	10,7	$\frac{1}{2}-3=3-\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$	36,4	1.....
6	22,3	0-5+3=-5-3=-8	86,0	(2a....)
7	38,8	-1,5-0,3=-1,2	80,0	3.....
8	29,1	-2,1+0,4=-2,5	73,3	2a....
9	27,2	0-3-8=-3-8=-5	64,3	3.....
10	17,5	-5+8=-13	83,3	2a....
11	68,9	(-3)-(-5)=-3-5=-8 (-(-...)=-...; dann s.3) "Beide minus ergibt minus"	87,3	(3,17..)

Aufg. Nr.	Fehlerquote (%)	Fehlertyp (und Fehlkonzept)	rel. Fehlerqu.(%)	Parallelfehlertyp in Aufg.Nr.
12	10,7	a) (+3)-(+5)=3-5=5-3=2	27,3	1....
		b) (+3)-(+5)=3+5=8 (-(+...)=+....nur Zeichen vor der Zahl berücksichtigt.)	18,2	11,13a, 14a
		c) (+3)-(+5)=-8	36,4	
13	61,2	a) (-4)-(+7)=-4+7=3 (s.12b)	79,4	12b...
		b) (-4)-(+7)=-4+7=-7+4=-3 (s.12b und 2b)	11,1	12b,2b
14	33,0	a) (-4)+(-3)=-4+3=-1 (s.12b)	76,5	13a
15	15,5	a) 2·(-3)=3 (2·(-3)=2.3-3=3)	37,5	16a
		b) 2·(-3)=6 "Vorzeichen übersenen"	12,5	16c
16	17,5	a) (-4)·3=8 (3.4-4=-8)	50,0	15a
		b) (-4)·3=-8 ((-4)·3=-12-4=-8; s.15a, 3)	16,7	15a,3
		c) (-4)·3=12	11,1	15b
17	75,7	(-5)·(-2)=-10 ("-.- ist (erst recht) -"); "die ganze Sache verläuft unter Null".	84,6	18
18	65,0	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)=-1$	77,6	17
19	17,5	$\frac{-6}{2}=-12$ "Bei Minuszeichen wird die Division zur Multiplikation". (s. 19)	55,6	20
20	14,6	(-8):4=-32	33,3	19

Aufg. Nr.	Fehlerquote (%)	Fehlertyp (und Fehlkonzept)	rel. Fehlerqu.(%)	Parallelfehlertyp in Aufg.Nr.
21	42,7	a) 5:(-10)=-2 (Kommutativität bei Division)	47,8	
		b) 5:(-10)=50	11,4	19,20
22	61,2	a) $\frac{-12}{-4}=-3$	88,9	17,18
		b) $\frac{-12}{-4}=48$	4,8	19,20,21b
23	9,7	Anordnung Z^- (Inversion)	50,0	(2,3)
24	1,9	Anordnung Z	100,0	"
25	3,9	Anordnung N (s.o.)	25	"
26	2,9	Anordnung Z^- (s.o.)	25	"
27		Kontomodell : 21,4% Thermometermodell: 27,2% Zahlengerade : 19,4% Gegenzahl : 4,9% operativer Aspekt: 3,9% Mehrfachnennungen: 12,5%		
28		Nennung des gleichen Modells wie in 27.: 70,9% Nennung eines anderen Modells : 29,1%		

4.5.2.6. Auflistung und Interpretation der häufigsten Fehler in den einzelnen Aufgaben zu ST Z/4
(Die Aufg.Nr. sind entsprechend der Anordnung der Aufgaben im VT umgeordnet. Die Original-Aufg.Nr. ist in Klammern angegeben.)

Aufg. Nr.	Fehler-quote (%)	Fehlertyp (und Fehlkonzept)	rel. Fehler-qu.(%)	Parallel-fehler-typ in Aufg.Nr.
3(1)	16,5	-8-5=-8+5=-3	64,7	s.VT
1(2)	3,9	4-7=7-4=3	75,0	
2(3)	10,7	a) -7+3=-7-7=-10 b) -7+3= 7-3=4	54,5 27,3	
4(4)	9,7	a) 5-11+2=-6+2=-6-2=-8 b) 11-5+2=6+2=8	60,0 10,0	
6(5)	9,7	0-6+4=-6-4=-10	40,0	
5(6)	12,6	a) $-\frac{1}{2}-4=4-\frac{1}{2}=3\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}-4=4-\frac{1}{2}=-4\frac{1}{2}$	15,4 30,8	
7(7)	19,4	-1,4-0,3=-1,4+0,3=-1,1	70,0	
8(8)	23,3	-2,2+0,6=-2,2-0,6=-2,8	62,5	
10(9)	6,8	-5+7=-5-7=-12	71,4	
9(10)	14,6	0-4-9=-4+9=5	33,3	
11(11)	23,3	a) (-2)-(-5)=-2+5=-2-5=-7 b) (-2)-(-5)=... =7	33,3 62,5	
14(12)	8,7	a) (-5)+(-4)=.... =9 b) (-5)+(-4)=-5-4=-5+4=-1	66,7 22,2	
12(13)	6,8	a) (+2)-(+6)=6-2=4	66,7	
13(14)	19,4	a) (-3)-(+7)=(+7)-(-3)=7-3=4 bzw. =-3-7=-3+7=4	55,0	

Aufg. Nr.	Fehlerquote (%)	Fehlertyp (und Fehlkonzept)	rel. Fehlerqu.(%)	Parallelfehlertyp in Aufg.Nr.
15(15)	1,0	$3\cdot(-5)=15$ (Vorzeichen übersehen)	100,0	s.VT
16(16)	1,9	a) $(-6)\cdot 3=(-6)\cdot 4=-24$ b) $(-6)\cdot 3=(-6):3=-2$	50,0 50,0	
18(17)	13,6	a) $(-\frac{1}{3})\cdot(-3)=-1\ldots$ b) $(-\frac{1}{3})\cdot(-3)=(-0,3)\cdot(-3)=0,9$	50,0 21,4	
17(18)	6,8	$(-4)\cdot(-2)=-8$	100,0	
20(19)	3,9	$(-10):5=10:5=2$	50,0	
19(20)	6,8	$\frac{-8}{2}=(-8)\cdot 2=-16$	28,6	
22(21)	13,6	$\frac{-15}{-3}=-5$	50,0	
21(22)	10,7	$4:(-8)=(-8):4=-2$	54,5	
24(23)	1,9	Anordnung Z (Inversion)	100,0	
25(24)	1,9	Anordnung N (s.o.)	100,0	
23(25)	1,0	Anordnung Z^- (s.o.)	100,0	
26(26)	1,0	Anordnung Z^- (s.o.)	100,0	

27	Kontomodell : 41,7% Thermometermodell: 29,1% Zahlengerade : 35,0% Gegenzahl : 10,7% operativer Aspekt: ./. Mehrfachnennungen: 32%
28	Nennung des gleichen Modells wie in 27.:71,8% Nennung eines anderen Modells :28,2%

4.5.2.7. Auflistung und Interpretation der häufigsten Fehler in den einzelnen Aufgaben zu NT Z/Q (s. Anmerkung zu 4.5.2.6.)

Aufg. Nr.	Fehlerquote (%)	Fehlertyp (und Fehlkonzept)	rel. Fehlerqu.(%)	Parallelfehlertyp in Aufg.Nr.
1(1)	1,9	3-8=8-3=5	50,0	s.VT
3(2)	21,4	-7-5=7+5=-2	59,1	
2(3)	14,6	-6+4=-6-4=-10	86,7	
4(4)	9,7	4-12+3=-8+3=-8-3=-11	60,0	
5(5)	5,8	$\frac{1}{2}-5=5-\frac{1}{2}=4,5$	66,7	
6(6)	12,6	0-7+5=-7-5=-12	69,2	
8(7)	18,4	-2,2+0,4=-2,2-0,4=-2,6	89,5	
7(8)	18,4	-1,5-0,4=-1,5+0,4=-1,1	78,9	
10(9)	14,6	-4+7=-7-4=-11	80,0	
9(10)	16,5	0-5-9=-5-9=-5+9=4	76,5	
11(11)	21,4	a) (-3)-(-4)=3+4=7 b) (-3)-(-4)=-3+4=-3-4=-7	40,9 40,9	
12(12)	5,8	(+3)-(+7)=(+7)-(+3)=4	66,7	
14(13)	16,5	(-6)+(-4)=-6-4=-6+4=-2	58,8	
13(14)	18,4	(-5)-(+8)=(+8)-(-5)=8-5=3	68,4	
16(15)	1,0	(-5)·3=15	100,0	
15(16)	7,8	2·(-4)=2·4=8	87,5	
17(17)	13,6	(-4)·(-3)=-12	92,9	
18(18)	16,5	$(-\frac{1}{4})\cdot(-4)=-1$	58,8	

Aufg. Nr.	Fehler-quote (%)	Fehlertyp (und Fehlkonzept)	rel. Fehler-qu.(%)	Parallel-fehler-typ in Aufg.Nr.
19(19)	4,9	$\frac{-6}{3}=2$	100,0	s.VT
20(20)	5,8	a) $(-9):3=(-9)\cdot\frac{1}{3}=-27$ b) $(-9):3=9:3=3$	16,7 66,7	
21(21)	22,3	$6:(-12)=(-12):6=-2$	52,2	
22(22)	10,7	$\frac{-16}{-4}=-4$	100,0	
25(23)	5,8	Anordnung in N (Inversion)	100,0	
23(24)	1,9	Anordnung in Z^- (s.o.)	100,0	
24(25)	1,9	Anordnung in Z (s.o.)	100,0	
26(26)	2,9	Anordnung in Z^- (s.o.)	100,0	

27

Kontomodell : 35,0%
Thermometermodell: 38,3%
Zahlengerade : 46,6%
Gegenzahl : 10,7%
operativer Aspekt: ./.
Mehrfachnennungen: 31,1%

28

Nennung des gleichen Modells wie in 27.: 75,7%
Nennung eines anderen Modells : 22,3%

4.5.2.8. Die wichtigsten Fenlertypen und ihre relative Häufigkeitsentwicklung

Aufg. Nr.	Gesamtfehlerquote (%) Fehlerquote dieses Fehlertyps (%)			Fehlertyp	rel. Fehlerquote (%)		
	VT	ST	NT		VT	ST	NT
2	18,4 13,6	10,7 5,8	14,6 12,6	$-8+3=-8-3=-11$	73,7	54,5	86,
3	27,2 23,3	16,5 10,7	21,4 12,6	$-7-4=-7+4=-3$	85,7	64,7	59,
4	38,8 25,2	9,7 5,8	9,7 5,8	$4-10+2=-6+2=-6-2=-8$	65,0	60,0	60,
6	22,3 19,4	9,7 3,9	12,6 8,7	$0-5+3=-5+3=-5-3=-8$	87,0	40,0	69,
7	38,8 31,0	19,4 13,6	18,4 14,5	$-1,5-0,3=-1,5+0,3=-1,2$	80,0	70,0	78,
8	29,1 21,3	23,3 14,6	18,4 16,5	$-2,1+0,4=-2,1-0,4=-2,5$	73,3	62,5	89,
9	27,2 17,5	14,6 4,9	16,5 12,6	$0-3-8=-3-8=-3+8=5$	64,3	33,3	76.
10	17,5 14,6	6,8 4,9	14,6 11,7	$-5+8=-5-8=-13$	83,3	71,4	80.
11	68,9 60,1	23,3 7,8	21,4 8,8	$(-3)-(-5)=-3+5=-3-5=-8$ $=-3-5=-8(--=+)$	87,3	33,3	40.
13	61,2 48,6	19,4 10,7	18,4 12,6	$(-4)-(+7)=-4-7=-4+7=3$	79,4	55,0	68
14	33,0 25,2	8,7 1,9	16,5 9,7	$(-4)+(-3)=-4-3=-4+3=-1$	76,5	22,2	58
17	75,7 64,0	6,8 6,8	13,6 12,6	$(-5)\cdot(-2)=-10$	84,6	100,0	92
18	65,0 50,4	13,6 6,8	16,5 9,7	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)=-1$	77,6	50,0	58
21	42,7 20,4	10,7 5,8	22,3 11,6	$5:(-10)=(-10):5=-2$	47,8	54,5	52
22	61,2 54,4	13,6 6,8	10,7 10,7	$\frac{-12}{-4}=-3$	88,9	50,0	100
MW	41,8 32,6	13,8 7,4	16,4 11,4		77,0	54,8	71

4.5.3.1. Gesamt-Fehlerhäufigkeiten Vortest "Zuordnungen"

Aufgabe Nr.	N=99 24 17 26 32 A B C E	Fehlertyp / Anzahl													⌐ Anz.	⌐ %	f. Anz.	f. %
1	⌐	2Punkte f/⌐	2Punkte f/⌐	Gerade eingetragen	Nur Zahlen eingetragen	Achsen vertauscht *												
	5 · · 15	2 2 7 3	4 1 3 ·	5 · 1 4	2 · · ·	7 3 9 11									20	20.2	34	34.3
2	⌐	12°	7,8° (MW v.1-17.Jan.)															
	- · · ·	1 · · ·	· · · 1														2	2.0
3a₁	⌐	36 (AF)	72 (DB)	48 (2)	8	128												
	4 1 4 4	· 1 · 1	· · 1 .	· · · 1	· · · 1	· · · 1									13	13.1	6	6.1
3a₂	⌐	60 (DB)	164	43,2(F)	39 (F)	42 (FF)	35	4	137									
	4 1 4 4	· · 1 2	· · · 2	1 · · ·	· 1 · ·	· 1 · ·	· · 1 ·	· · · 1	· · · 1						13	13.1	11	11.1
3b₁	⌐	16 (P)	2	4 (Teiler von 24)	144 (P)	6 (DF)	5	18										
	7 1 6 9	1 1 · ·	· · 2 ·	· · 2 ·	1 · · ·	· 1 · ·	· · · 1	· · · 1							23	23.2	10	10.1
3b₂	⌐	0	288 (P)	18 (P)	3 (FF)	68	32 (P)	(Teiler 3 von 24)	3 (nR)			22	5 (P+F)					
	7 1 6 9	· · 2 1	1 · · ·	1 · · ·	· 1 · ·	· 1 · ·	· 1 · ·	· · 1 ·	· · 1 ·	· · · 1	· · · 1	· · · 1			23	23.2	13	13.1
4	⌐	12,5 (10)	12,05 (10+DF)	0,36	6 (DF)	8,4(DF)	16,2(DF)	13,8 (10+F)	2,6 (10+F)	9,72 (DF)	1,028	1,44	15,56 (10+F)	1250 (10+F)				
	2 · 5 5	2 · 4 17	· · · 2	· · · 2	1 · · ·	1 · · ·	1 · · ·	· 1 · ·	· · 1 ·	· · 1 ·	· · 1 ·	· · 1 ·	· · · 1	· · · 1	12	12.1	37	37.4
5	⌐	40(kD)	14 (13,3)	40-6	420statt 240m³ (A)	$\frac{36}{45}$=0,8=8	$15\frac{1}{3}$ (A)	3,6 (F)	6	3	1,2							
	2 1 7 7	1 · 3 2	· · · 2	1 · · ·	1 · · ·	1 · · ·	· 1 · ·	· 1 · ·	· · 1 ·	· · · 1	· · · 1							
															17	17.2	16	16.2

P Proportionale statt antiprop. Zuordnung
DB Differenzbildung zwischen beiden Spalten
10 inverse Operation/Dividend und Divisor vertauscht
A falsche Ausgangsgröße
kD keine Differenz gebildet
* nicht als Fehler gewertet

F Rechenfehler
AF Additionsfehler
DF Divisionsfehler
FF Folgefehler
KF Kommafehler
nR nur rechte Spalte beachtet

	A	B	C	E
MW	7.5	9.7	7.4	5.8
(P.)	7,3			
a	2.3	1.8	1.9	2.2
(P.)	2,1			
r	9	6	10	9
(P.)	8,8			

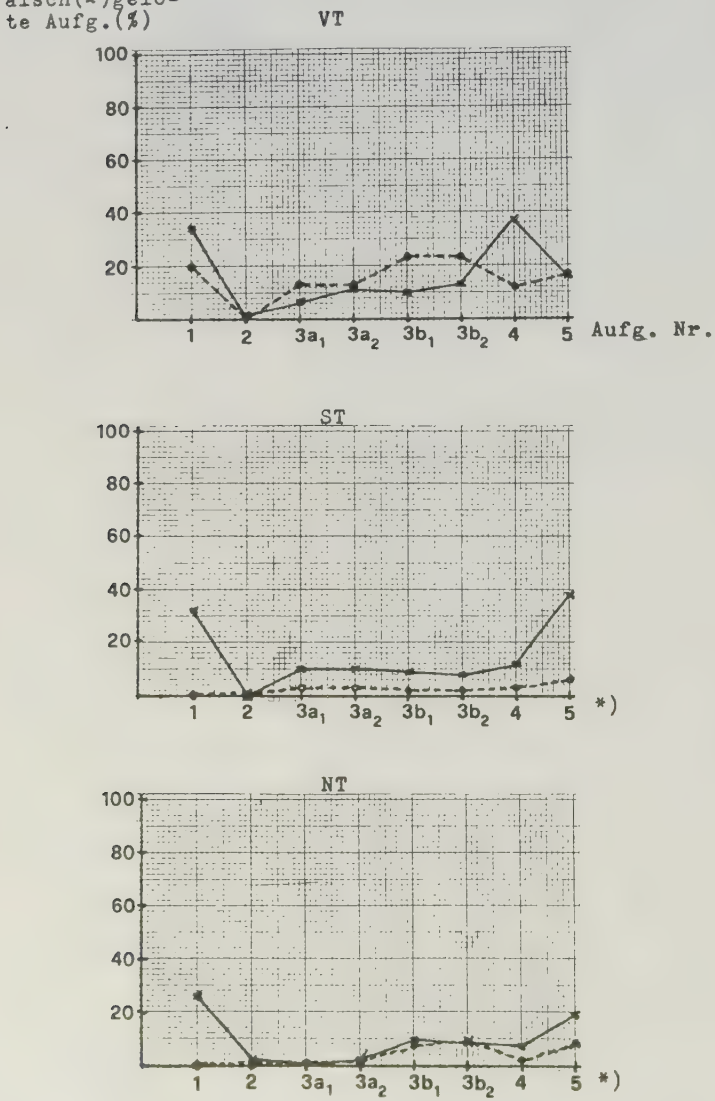
Aufgabe Nr.	N=99 24 17 26 32 A B C E	Fehlertyp / Anzahl														Anz.	%	f. Anz.	f. %
1	⌐	2Punkte f/⌐	2Punkte f/⌐	Achsen vertauscht														32	32,3
		9 2 3 17		11 1 13															
2	⌐	25°																1	1,0
		1																	
3a$_1$	⌐	60 (KF)	24 (P)	13,5(F)	4 (nR)	7 (F)	3	86 (RD)								2	2,0	9	9,1
	2	2	2	1	1	1	1	1											
3a$_2$	⌐	48 (P)	6,75(FF)	30 (FF)	4,5(nR)	360(UF)	6	118(FF)								2	2,0	8	8,1
	2	2	1	1	1	1	1	1											
3b$_1$	⌐	4 (F)	25,2(AP)	236(nR)	192(nR)	36	48 (RD)	0,4	96 (RD+F)	94(RD)						3	3,0	10	10,1
	3	2	1	1	1	1	1	1	1										
3b$_2$	⌐	108(RD)	12 (AP)	28,5(AP)	56 (F)	144(nR)	208(FF)	52	64(nR)							3	3,0	10	10,1
	3	2	1 1	1	1	1	1	1	1										
4	⌐	6,25(10)	19,6 (10+KP)	22,4 (DF)	15 (DF)	1,84 (2i+KP)	31	15 (A)	15,85 (DF)	$\frac{4}{25}$(10)	176(10)	6,04 (10+F)				3	3,0	12	12,1
	2 1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1							
5	⌐	9,3(kD)	3h (AP)	522,4 (A+kD)	1,6 (10+kD)	8 (DF+10)	16	5,64 (DF)	9,2 (10+kF)	32	10h10' (F+kD)	$4\frac{1}{3}$ (fK)	3h50' (A)	$2\frac{1}{2}$ (10)					
	3 3	2 1 7	1 1 4	2	2			1 1	1	1	1	1	1	1					
	zu 5	14(?+kD)	$5\frac{1}{5}$(RF)	5 (RF)	336 (10)	1,71 ($\frac{4 \cdot 24}{56}$)	3,36 (10+F)												
		1		1	1	1	1									6	6,1	38	38,4

UF Übertragungsfehler (Rechnung→Tabelle)
AP antiproportionale statt proportionale Zuordnung
Zi Ziffern vertauscht
RD Regelmäßigkeiten in der Differenzbildung links/rechts fortgesetzt
fK falsch gekürzt
RF Rundungsfehler

	A	B	C	E
MW (P.)	9,3	10,4	9,4	8,3
	9,2			
a (P.)	13	07	13	19
	1,4			
f (P.)	5	2	8	7
	5,9			

4.5.3.3. Gesamt-Fehlerhäufigkeiten Nachtest "Zuordnungen"

4.5.3.4. Gesamt-Kenntnisprofile VT, ST, NT Zuordnungen



*) Zur besseren Vergleichbarkeit wurde den Aufgabentypen im Vortest entsprechend umgeordnet.

4.5.3.5. Auflistung der häufigsten Fehlertypen in den einzelnen Aufgaben zu VT Zuordnungen

Aufg. Nr.	Fehlerquote (%)	Fehlertyp	rel. Fehler-quote (%)
1	34,3	Ein oder zwei Punkte sind falsch eingetragen oder fehlen	41,2
		Mehr als zwei Punkte sind falsch eingetragen oder fehlen	23,5
		Nur eine Gerade (Winkelhalbierende) ist eingetragen	29,4
	30,3	Achsen vertauscht	./.
2	2,0	Einfache Ablesefehler	50,0
$3a_1$	6,1	Rechenfehler *)	33,3
$3a_2$	11,1	Rechenfehler	27,3
$3b_1$	10,1	Rechenfehler	10,0
		Als proportionale (statt antiprop.) Zuordnung behandelt	30,0
$3b_2$	13,1	Rechenfehler	15,4
		Als proportionale (statt antiprop.) Zuordnung behandelt	30,8
		Fortsetzung von Differenz-Gesetzmäßigkeiten in der rechten Spalte	23,1
4	37,4	Rechenfehler	18,9
		Dividend und Divisor vertauscht ("inverse Operation")	78,4
5	16,2	Rechenfehler	6,3
		Differenzbildung (bereits verladene zu noch nicht verladenen Fuhren) nicht durchgeführt	37,5
		Ansatz mit anderen Zahlenwerten	12,5

*) Unter diesem Begriff werden hier alle als mathematische Operationsfehler erkennbaren Fehler zusammengefaßt, die in dieser Übersicht nicht genauer spezifiziert werden.

4.5.3.6. Auflistung der häufigsten Fehlertypen in den einzelnen Aufgaben zu ST Zuordnungen

Aufg. Nr.	Fenlerquote (%)	Fehlertyp	rel. Fehler-quote(%)
1	32,3	Ein oder zwei Punkte sind falsch eingetragen oder fehlen	96,9
		Mehr als zwei Punkte sind falsch eingetragen oder fehlen	3,1
	15,2	Achsen vertauscht	./.
2	1,0	Einfache Ablesefehler	100,0
$3a_1$	9,1	Rechenfehler	44,4
		Als proportionale (statt anti-prop.) Zuordnung behandelt	22,2
$3a_2$	8,1	Rechenfehler	25,0
		Als proportionale (statt anti-prop.) Zuordnung behandelt	25,0
$3b_1$	10,1	Rechenfehler	30,0
		Als antiproportionale (statt proportionale) Zuordnung behandelt	10,0
$3b_2$	10,1	Rechenfehler	10,0
		Als antiproportionale (statt proportionale) Zuordnung behandelt	30,0
4	12,1	Rechenfehler	50,0
		Anwendung des inversen Operators	41,7
5	38,4	Rechenfehler *)	15,8
		Differenzbildung nicht durchgeführt (s.VT)	50,0
		Anwendung des inversen Operators	13,2
		Als antiproportionale (statt proportionale) Zuordnung behandelt	15,8
		Ansatz mit anderen Zahlenwerten	7,9

*) Rechenfehler treten auch oft zusätzlich zu anderen Fehlern auf. Deshalb können sich in der relativen Fehlerquotensumme hier Werte uber 100% ergeben.

4.5.3.7. Auflistung der häufigsten Fehlertypen in den einzelnen Aufgaben zu NT Zuordnungen

Aufg. Nr.	Fehlerquote (%)	Fehlertyp	rel. Fehler-quote(%)
1	26,3	Ein oder zwei Punkte sind falsch eingetragen oder fehlen	88,5
		Mehr als zwei Punkte sind falsch eingetragen oder fehlen	11,5
	15,2	Achsen vertauscht	./.
2	2,0	Einfache Ablesefehler	100,0
$3a_1$	0,0	./.	./.
$3a_2$	3,0	Rechenfehler	100,0
$3b_1$	9,1	Rechenfehler	44,4
		Als proportionale (statt antiproportionale) Zuordnung behandelt	44,4
$3b_2$	8,1	Rechenfehler	37,5
		Als proportionale (statt antiproportionale) Zuordnung behandelt	62,5
4	7,1	Rechenfehler	85,7
		Anwendung des inversen Operators	14,3
5	19,2	Rechenfehler	31,6
		Differenzbildung nicht durchgeführt (s.VT)	26,3
		Ansatz mit anderen Zahlenwerten	26,3

4.5.3.8. Die wichtigsten Fehlertypen und ihre relative Häufigkeitsentwicklung.

Aufg. Nr.	Gesamtfehlerquote (%) Fehlerquote dieses Fehlertyps (%)			Fehlertyp	rel. Fehlerquote (%)		
	VT	ST	NT		VT	ST	NT
1	34,3	32,3	26,3				
	14,1	31,3	23,3	1 o. 2 Punkte f.o.⌐	41,2	96,9	88,5
	8,1	1,0	3,0	Mehr als 2 Pkte. falsch o.⌐	23,5	3,1	11,5
	10,1	0,0	0,0	Nur Winkelhalbierende eingetragen	29,4	0,0	0,0
	30,3	15,2	15,2	Achsen vertauscht			
$3a_1$	6,1	10,1	0,0				
	2,0	3,0	0,0	Rechenfehler	33,3	30,0	0,0
	0,0	1,0	0,0	Als antiproportionale Zuordnung behandelt	0,0	10,0	0,0
$3a_2$	11,1	10,1	3,0				
	3,0	1,0	3,0	Rechenfehler	27,3	10,0	100,0
	0,0	3,0	0,0	Als antiprop. Zuord. behandelt	0,0	30,0	0,0
$3b_1$	10,1	9,1	9,1				
	1,0	4,0	4,0	Rechenfehler	10,0	44,4	44,4
	3,0	2,0	4,0	Als proportionale Zuord. behandelt	30,0	22,2	44,4
$3b_2$	13,1	8,1	8,1				
	2,0	2,0	3,0	Rechenfehler	15,4	25,0	37,5
	4,0	2,0	5,1	Als prop. Zuord. benandelt	30,8	25,0	62,5
4	37,4	12,1	7,1				
	7,1	6,1	6,1	Rechenfehler	18,9	50,0	85,7
	29,3	5,1	1,0	Anwendung des inversen Operators/inverse Opereration	78,4	41,7	14,3
5	16,2	38,4	19,2				
	1,0	6,1	6,1	Rechenfehler	6,3	15,8	31,6
	6,1	19,2	5,1	Differenzbildung nicht durchgeführt	37,5	50,0	26,3
	2,0	3,0	5,1	Ansatz mit anderen Zahlenwerten	12,5	7,9	26,3
	0,0	5,1	0,0	Anwend. des inversen Operators	0,0	13,2	0,0
	0,0	6,1	0,0	Als antiprop. Zuordnung behandelt	0,0	15,8	0,0
MW	18,3	17,2	10,4				
	8,8	9,1	5,9		39,8	39,4	48,0

4.6. Schlußfolgerungen

Wegen der sehr unterschiedlichen Struktur der beiden untersuchten Lerneinheiten und der in diesen beiden Einheiten verwandten Testaufgaben sollen als erstes aus den Fehleranalysen getrennt Schlußfolgerungen gezogen werden. Zunächst also zur Lerneinheit "Ganze und rationale Zahlen": Hier ergibt sich eine Fülle wichtiger Folgerungen bereits aus der Fehleranalyse des Vortests:

1. Relativ wenige Schüler ließen Aufgaben aus (im Aufgabendurchschnitt 7,6%, nur bei Nr. 21 über 25%). Dies deutet darauf hin, daß die meisten Schüler bereits eine gewisse Vorstellung vom Rechnen mit rationalen Zahlen haben. Nur 15% der Schüler erreichten weniger als die Hälfte der maximalen Punktzahl, 66% zwischen 1/2 und 3/4 und 19% der Schüler sogar mehr als 3/4 der maximalen Punktzahl (s. auch Einzelfallstudien im Anhang, die Prozentangaben sind gerundet).

2. Der Kenntnisstand ist vor allem im Bereich "Addieren/Subtrahieren ohne Klammern" (Nr.1...10) erstaunlich hoch, d.h. überall deutlich über 50%.

3. Besonders leicht fallen einfache Überschreitungen in den negativen Zahlenbereichen (Nr. 1 und 5).

4. Die Anordnung der negativen ganzen Zahlen ist über 90% der Schüler geläufig.

5. Fast alle Schüler haben bereits ein Modell von Z^- bzw. Z, davon ca. 68% ein Konto- und/oder Thermometermodell und/oder das Metamodell Zahlengerade.

6. Vorhandene Modelle begründen auch in einfachen Fällen noch kein richtiges Rechnen. Z.B. assoziieren viele Schüler zwar mit den ganzen Zahlen das Kontomodell, Thermometermodell..., benutzen aber beim konkreten Rechnen meist andere Methoden, wie die Fehleranalyse (s.o.) zeigt. Es ist zu vermuten, daß in den meisten Fällen diese Modelle nur assoziiert und noch nicht handlungs-

bezogen internalisiert sind. Mit kognitionspsychologischen Begriffen beschrieben (s. Ende Kap. 3): Die Modelle für ganze (negative) Zahlen, deren Anordnung, die ihnen zugeschriebenen Eigenschaften... sind im Gedächtnis relativ unverbunden mit den Gedächtnisbildern von Additions-, Subtraktions-... Aufgaben. Sie müssen erst mit diesen (richtig) "vernetzt" werden.

7. Besonders bei Aufgaben mit relativ hoher Fehlerquote (z.B. 11, 13, 17, 18) liegt der Anteil eines bestimmten Fehlertyps/Fehlkonzepts sehr hoch (immer höher als 75%), aber auch bei allen anderen Aufgaben gibt es stets einen deutlich vorherrschenden Fehlertyp (meist höher als 50%).

8. Die Mittelwerte des Anteils richtig gelöster Aufgaben weichen in den 4 untersuchten Klassen wenig voneinander ab (ca. 17,8 P. $\pm$ 0,3 P. von 28 P.), Auch die mittleren Abweichungen und Spannweiten stimmen nahezu überein (s.4.5.1.1.).

9. Man findet eine Fülle "exotischer" Fehler (wie: 0-3-8= 0,01; -2,1+0,4=3,7...).

Die wichtigsten Schlußfolgerungen aus den Fehleranalysen lassen sich aus 4.5.2.8. ablesen. Während die Entwicklung der mittleren Fehlerquote für den gesamten Test mit 26,4% (VT)→8,7%(ST)→10,4%(NT) im Nachtest nur verhältnismäßig leicht ansteigt, zeigt sich bei den von deutlichen Fehlpräkonzepten der Schüler stark geprägten 15 wichtigsten Fehlertypen ein spürbar stärkerer Anstieg der mittleren Fehlerquote im Nachtest (32,6%→7,4%→11,4% durchschnittliche Fehlerquote) bei gleichzeitig sinkendem Anteil der weitern Fehlertypen (11,2%→6,4%→5,0%) (s.4.5.1.8.). Daraus kann man auf die große Hafttiefe dieser Fehlvorstellungen schließen, die nur kurzfristig im Schlußtest retuschiert sind.

Alle 15 wichtigsten und beständigsten Fehlertypen lassen sich auf drei Fehlkonzepte zurückführen, von denen das erste bereits in Kap. 2.2. und Kap. 3 unter Bezug auf Piaget er-

wähnt wurde.

Dieses erste Fehlkonzept kann man als den operativen Aspekt des Plus- und des Minuszeichens bezeichnen (s.A. 2,3,4,6,7,8,9,10,11,13,14), er ist besonders beständig. Das Pluszeichen bedeutet hier im Verständnis des Schülers immer ein "Hinzutun", was für ihn daran abzulesen ist, daß die entsprechende Zahl vom Betrag, vom Zahlbegriff als Quantitätsbegriff her, größer wird. Das Minuszeichen bedeutet entsprechend ein "Wegnehmen", was sich in kleiner werdendem Betrag ausdrücken muß. Das bestätigen auch die ergänzenden Befragungen, wo sich die Schüler z.B. so ausdrücken: "...3 weniger", "...3 weg", "...3 dazu".. (Zum Versuch einer detaillierten Analyse dieses Fehlkonzepts mit Hilfe kognitionspsychologischer Gedächtnismodelle s. Ende Kap. 3).

Das zweite Fehlkonzept "Minus mal/geteilt durch Minus ergibt immer Minus" (s.A. (11), 17, 18, 22) ist wohl durch die hier bestehende quantitative Übermacht des Minuszeichens bedingt, die es wohl auch nach "gesundem Menschenverstand" nicht rechtfertigt, einfach ein Pluszeichen zu setzen. Eine Bestärkung dieser Ansicht durch den bei den Schülern ebenfalls ausgeprägten Wertaspekt des "Negativen" (Schulden, "Miese", "Nicht normal", "schlecht..." (s.Kap.0)) ist nicht auszuschließen. Dieses Fehlkonzept zeigt eine sehr hohe Eingangshäufigkeit, im Schlußtest geht die Häufigkeit teilweise rapide zurück und nimmt im Nachtest wieder beträchtlich zu.

Das dritte Fehlkonzept tritt nicht so deutlich hervor, da es nur in einer Aufgabe möglich ist, dort führt es jedoch zu einer beträchtlichen und sehr beständigen Fehlerquote. Es besteht darin, beim Dividieren einer natürlichen durch eine negative ganze Zahl Dividend und Divisor zu vertauschen. Die Inversion der Zahlengeraden wird hier möglicherweise auf diese Operation übertragen (vgl. auch das "Motto": "Bei Minus geht's anders 'rum" bei Lisa Hefendehl in Bauersfeld 1978).

Fast alle Schüler nennen mindestens ein Modell für die ganzen Zahlen, fast ein Drittel nennt ohne besondere Aufforderung mehrere Modelle. Dabei herrschen in allen drei Tests das Kontomodell und das Thermometermodell sowie das Metamodell Zahlengerade vor, wobei das Thermometermodell (27,2%→29,1%→38,8%) und das diesem verwandte Metamodell der Zahlengeraden (19,4%→35%→46,6%) sich immer mehr durchsetzen, während das Kontomodell nach starkem Anstieg im Nachtest wieder rückläufige Tendenz zeigt (21,4%→41,7%→35%).[74)]

Ausgehend von der obigen Fehleranalyse kann man für die Lerneinheit "Ganze und rationale Zahlen" in bezug auf die Thesen 1 und 3 der Arbeit (s.S. 4f) feststellen:

zu These 1: Die Lernprozesse in der Lerneinheit "Ganze und rationale Zahlen" werden wesentlich durch das (erstaunlich große) Vorverständnis der Schüler beeinflußt. Dies gilt insbesondere für die längerfristigen Wirkungen des Unterrichts (s.NT), die zeigen, daß bestimmte Fehlpräkonzepte nach anfänglicher Retusche bald wieder durchbrechen.

zu These 3: Die auf die untersuchte Lerneinheit bezogenen internalen Lernvoraussetzungen der Schüler lassen sich tatsächlich auf wenige Schemata (Konzepte) reduzieren ("operativer Aspekt" des Plus- und Minuszeichens, Minus mal/geteilt durch Minus ergibt Minus, Vertauschung von Dividend und Divisor bei negativem Divisor).

Wie schon zu Beginn dieses Kapitels erwähnt und in Kapitel 4.3. etwas ausführlicher dargelegt, bietet die Lerneinheit "Zuordnungen" insbesondere wegen der Bedeutung der Textaufgaben für diese Lerneinheit mehr Auswertungsschwierigkeiten als die zuvor analysierte rein arithmetische Lerneinheit. So ist in vielen Fällen - wahrscheinlich aufgrund komplexerer Problemlöseprozesse beim Lösen der Aufgaben - eine wesentlich stärkere Streuung der Fehlertypen zu konstatieren. Aus dem gleichen Grund liegt hier auch der Anteil der Fehler, deren

Ursachen mit der verwandten Methode nicht eindeutig zu klären sind, teilweise beträchtlich höher. Die Methode der Fehleranalyse stößt hier bei einigen Aufgaben an ihre Grenzen. Interviews, die "Methode des (nachträglichen) lauten Denkens" u. ä. könnten hier genauere Aufschlüsse bringen (s. Dissertation Polster). Trotzdem können, wie die Tabellen 4.5.3.5. und 4.5.3.8. sowie das Kenntnisprofil 4.5.3.4. zeigen, wieder bereits aus der Fehleranalyse des Vortests "Zuordnungen" interessante Befunde abgelesen werden:

1. Bereits vor Eintritt in die Lerneinheit wird (bis auf Aufgabe 1 mit 45,5%) jede der verwandten Aufgaben von über 50% aller Schüler richtig gelöst.

   Nur ca. 27% der Schüler erreichten weniger als die Hälfte, 33% zwischen 1/2 und 3/4 und bereits 39% der Schüler sogar mehr als 3/4 der maximalen Punktzahl. (Die Prozentangaben sind gerundet.) Daraus kann man - ähnlich und noch deutlicher als im Fall "Ganze und rationale Zahlen" - auf einen beträchtlichen und bisher zu wenig beachteten Bestand an direkt unterrichtsbezogenem Vorwissen der Mehrzahl der Schüler schließen.

2. Darauf deutet auch hin, daß im Aufgabendurchschnitt 15,3% und bei keiner Aufgabe mehr als 23,2% der Schüler die Aufgabe ausließen. Der mittlere Prozentsatz liegt allerdings doppelt so hoch wie bei der vorigen Lerneinheit, was u.a. dadurch bedingt ist, daß ein gewisser Anteil der Schüler mit antiproportionalen Zuordnungen und vor allem Textaufgaben nichts anzufangen wußte.

3. Andererseits steht bei der Lerneinheit "Ganze und rationale Zahlen" einer durchschnittlichen Auslassungsquote von 7,6% eine durchschnittliche Fehlerquote von 26,4% gegenüber, während dieses Verhältnis bei der Lerneinheit "Zuordnungen" 14,7% zu 16,3% ist. Dies läßt darauf schließen, daß bei der letzten Lerneinheit relativ weniger oder, zumindest in der Selbsteinschätzung der Schüler, weniger eingeschliffene (und damit auch weniger sta-

bile) Fehl-Präkonzepte vorhanden sind.

4. Die Aufgabe, eine Tabelle in einen Graphen umzusetzen, wobei eine Vertauschung der Achsen zwar erfaßt, in keinem der drei Tests aber als Fehler (mit Punktabzug) gewertet wurde, und die beiden Textaufgaben weisen deutlich höhere Fehlerquoten auf als die beiden Tabellen zur propotionalen und antiproportionalen Zuordnung.
5. Proportionale Zuordnungen entsprechen offensichtlich mehr dem Denken der Schüler dieses Alters. Dies war aufgrund der einfacheren zu verwendenden Zuordnungsregeln wie auch der Umwelterfahrungen (Menge,Preis ....) der Schüler zu erwarten.
6. Die Mittelwerte der richtig gelösten Aufgaben weichen in den vier untersuchten Klassen[75)] beträchtlich stärker (7,28 P.±2,07 P.) voneinander ab als bei der vorher untersuchten Lerneinheit. Vor allem weist die neu aufgenommene Klasse (E) deutlich geringere Vorkenntnisse auf.[76)]
7. Auch bei dieser Lerneinheit findet man wieder eine Fülle "exotischer Fehler": "private" Rechenregeln, "außergewöhnliches" Textverständnis, u.s.w..
   Die wichtigsten Aussagen über die Entwicklung des Schülerwissens ergeben sich auch hier wieder aus der vergleichenden Übersicht 4.4.3.8. sowie aus den Kenntnisprofilen 4.4.3.4.. Die Entwicklung der mittleren Fehlerquote für den gesamten Test ist rückläufig (16,3% (VT)→15,2%(ST)→9,4% (NT)). Besonders die Fehlerquote im Nachtest ist, im Gegensatz zur vorigen Lerneinheit, noch einmal deutlich geringer. Den Kenntnisprofilen ist jedoch zu entnehmen, daß dies vorwiegend auf beträchtlich sinkende Fenlerquoten in den Aufgaben 3a (proportionale Zuordnung) und 5 (Textaufgabe) zurückzuführen ist, während das Kenntnisprofil in den anderen Aufgaben nach Form und Niveau weitgehend erhalten bleibt. Eine weitere vermutete Ursache für die von der vorigen Lerneinheit abweichende Entwicklung der mittleren Fehlerquoten wurde bereits in Punkt 3

zum Vortest beschrieben.

Einen recht hohen Prozentsatz der Fehler machen Rechenfehler aus, d.h. Fehler bei der Anwendung der Grundrechenarten,[77] dabei nimmt deren relativer Anteil in den meisten Aufgaben vom Vortest zum Nachtest zu. Letzteres ist aber vorwiegend dadurch bedingt, daß die Gesamtfehlerquote sinkt, während die Anzahl der Rechenfehler etwa konstant bleibt.

Dagegen geht der Anteil der Fehler, die durch Anwendung eines inversen Operators bei den Textaufgaben entstehen, deutlich zurück.

Im Schlußtest treten, bedingt durch die von relativ vielen Schülern neu erlernte antiproportionale Zuordnung, in der Aufgabe 3 verstärkt Verwechslungen von proportionaler und antiproportionaler Zuordnung auf. Während jedoch die fälschliche Behandlung der proportionalen als antiproportionale Zuordnung (s. A.3a und A.5) im Nachtest völlig verschwindet, steigt der relative Anteil des umgekehrten Fehlertyps im Nachtest wieder an, was den Befund 4 (s.o.) zum Vortest stützt.

Der Anteil der offensichtlichen Textverständnisfehler in Aufgabe 5 (Differenzbildung nicht durchgeführt bzw. Ansatz mit anderen Zahlenwerten) bleibt insgesamt etwa gleich, hier ist also kaum ein Lerneffekt zu beobachten.

Die "richtige" Wahl der Koordinatenachsen bleibt für viele Schüler ein Problem, ebenso werden immer wieder Abszisse und Ordinate einzelner Punkte beim Umsetzen einer Tabelle in einen Graphen vertauscht.

Die obige Fehleranalyse erbringt für die Lerneinheit "Zuordnungen" in bezug auf die Thesen 1 und 3 der Arbeit folgende Ergebnisse:

zu These 1: Die Lernprozesse in der Lerneinheit "Zuordnungen" werden wesentlich durch das (hier in noch größerem Umfang) vorhandene Vorverständnis der Schüler beeinflußt. Allerdings werden hier einige Fehlkonzepte leichter und langzeitwirksamer durch

den Unterricht korrigiert.

zu These 3: Auch hier lassen sich die auf die untersuchte Lerneinheit bezogenen internalen Lernvoraussetzungen der Schüler auf wenige Konzepte reduzieren (Bevorzugung der proportionalen ("gerechten") Zuordnung; Anwendung der inversen Operation; (unvollständige Textauffassung bzw. -verarbeitung)).

Ausgehend von den obigen Fehleranalysen und der Begriffsanalyse des zweiten und dritten Kapitels kann man in bezug auf die drei Thesen der Arbeit (s.S.8) zusammenfassend feststellen:

zu These 1: Lernprozesse im Mathematikunterricht werden wesentlich durch das Vorverständnis der Schüler beeinflußt. Dies gilt insbesondere für die längerfristigen Wirkungen des Unterrichts (z. Nachtests), die zeigen, daß bestimmte Fehlpräkonzepte nach anfänglicher Retusche bald wieder durchbrechen.

zu These 2: Der für jede echte Genese konstituierende Faktor des Vorverständnisses fand, wie die Analyse des theoretischen Teils zeigt, in der bisherigen Literatur zum genetischen Prinzip zu wenig Berücksichtigung, wenn er auch bei verschiedenen Autoren anklingt (s. Mager, Wittenberg, Wittmann). Hier sollten in Zukunft systematische kognitionspsychologische Erkenntnisse und Modelle (wie am Ende Kap. 3 angedeutet) aufgegriffen und verarbeitet werden.

Daß das Vorverständnis wirklich konstituierend ist, zeigt die Bestätigung der ersten These. Der Entwicklung des Begriffssystems (weiter gefaßt: der kognitiven Strukturen) des Lernenden muß gegenüber der Entwicklung des Unterrichtsgegenstandes mehr Raum gegeben werden.

zu These 3: Die auf eine bestimmte Lerneinheit bezogenen

Lernvoraussetzungen der Schüler lassen sich zum großen Teil auf wenige Schemata (Konzepte) reduzieren. Daraus ergibt sich, daß insbesondere genetischer Unterricht diese aufgreifen, thematisieren und weiterentwickeln oder entsprechende Gegenkonzepte entwickeln sollte. Diese Konzepte sind teilweise soziogenetisch beeinflußt (s. insbesondere proportionale Zuordnung und Textverständnis) und teilweise durch den vorangegangenen Unterricht, in vielen Fällen vermutlich schon den Grundschulunterricht geprägt.

4.7. Ausblick

Unterrichtliche kognitive Lernprozesse bestehen in der Weiterentwicklung, dem Um- und Ausbau vorhandener kognitiver Strukturen. Diese durch neuere Forschungen der Kognitionspsychologie wieder verstärkt ins Bewußtsein gerückte Tatsache und deren unterrichtspraktische Konsequenzen, müssen von den Didaktikern deutlicher gesehen und zum planerischen Ausgangspunkt gemacht werden.

Dies bedeutet auf der unterrichtsforschenden und unterrichtsplanenden Seite zunächst einmal häufigere und gründlichere Diagnose der internalen Lernvoraussetzungen. Als Methoden hierzu bieten sich - wahrscheinlich nicht nur im Mathematikunterricht - vor allem Fehleranalysen, Interviews und (nachträgliches) lautes Denken an. Um ein "Vorverstandnisgeflecht" ermitteln zu können, müßte eine Reihe von Lerneinheiten bei größeren Schülerpopulationen untersucht werden. Dabei würde ein Zusammenwirken mit bereits bestehenden Ansätzen, insbesondere in der Physikdidaktik (s.Kap.3), sicher fruchtbar sein.

Solche umfassenden Untersuchungen internaler Lernvoraussetzungen würden mindestens unter vier Gesichtspunkten Gewinn bringen:

1. Nur so kann man erfahren, was im unterrichtlichen Lernprozeß wirklich "im Kopf des Schülers vorgeht", d.h. wie Unterricht auf die kognitiven Strukturen des Schülers einwirkt.

2. Nur so kann einer wirklich "genetischen"Gestaltung von Lernsequenzen eine empirische Basis gegeben werden.

3. Weiterentwickelte und relativ leicht auswertbare Vortests bzw. Testbatterien können den Lehrer für die Lernvoraussetzungen der Schüler sensibilisieren und seine Unterrichtsplanung wesentlich unterstützen.

4. Außerdem könnte sich eine zeitweise "Präkonzept"-bezogene innere Differenzierung (oder Individualisierung)

des Unterrichts als sinnvoll erweisen (s. auch Vorträge Diederich und Strunck auf der Tagung des IDM Bielefeld vom 1.-4.6.1982).

5. Zusammenfassung

Die Dissertation, die sich, vor allem im empirischen Teil, als explorative Studie versteht, verfolgt drei eng miteinander verbundene Hauptabsichten:

1. Sie versucht im empirischen Teil mit Mitteln der Fehleranalyse exemplarisch an zwei Lerneinheiten aus dem Mathematikunterricht der Sekundarstufe den großen Umfang des Vorverständnisses und dessen Einfluß auf den unterrichtlichen Lernerfolg des einzelnen Schülers nachzuweisen.
2. Im theoretischen Teil wird parallel dazu die Rolle des Vorverständnisses im schulischen Lernprozeß in der Literatur zum genetischen Prinzip in der Mathematikdidaktik untersucht, da dies doch eigentlich gerade dort ein Angelpunkt der Planung von und der Reflexion über Unterricht sein müßte.
3. Als Vorbereitung und Ergänzung hierzu wird jedoch zunächst der Versuch einer systematisierenden Reanalyse der Entwicklung des genetischen Prinzips in der Mathematikdidaktik unternommen, der sich der Versuch einer eigenen Begriffsbestimmung anschließt, die bereits auf das oben angedeutete Defizit verweist. Diese Reanalyse wird insbesondere durch die Vorarbeit G. Schuberings erleichtert, dessen ausführliche, mit personalen Fallstudien versehene Analyse von Rolle und Wandlungen des genetischen Prinzips in der Mathematikdidaktik 1978 erschien.

Schon in dieser historischen Reanalyse wird deutlich, daß der Aspekt des Vorverständnisses in der Literatur zum genetischen Prinzip bisher kaum gebührende Beachtung erfuhr.

Grob klassifiziert wird in allen historisch-genetisch orientierten Varianten des genetischen Prinzips dieses Problem auf die Vorform einer entwicklungspsychologischen Stufentheorie, eine Art Parallelismushypothese (s.S.16,123), reduziert. Ähnlich geschieht es oft bei psychologisch-genetischen Varianten.

In allen logisch-genetisch orientierten Varianten wird das Problem durch das der rechten Entfaltung und Entwicklung der Sache und der ihr innewohnenden elementaren und fundamentalen Gehalte verdrängt.

Dies bedeutet keineswegs ein vollständiges Ignorieren der Be-

deutung der internalen Lernvoraussetzungen, aber das Fehlen einer systematischen Behandlung. Das Problem leuchtet nur punktuell durch (z.B. bei Mager, s.S.14,26,125) und wird niemals leitend.

Diese Situation spiegelt sich in modifizierter Form auch in der neueren und neuesten Geschichte des genetischen Prinzips in der Mathematikdidaktik wieder, wie das 3. Kapitel nachzuweisen versucht. Auch hier wird das Problem des Vorverständnisses entweder auf das der Beachtung allgemeiner entwicklungspsychologischer Stufen - die Parallelismushypothese wird quasi durch die Piagetschen Entwicklungsstufen ersetzt - reduziert (Wittmann, s.S. 44/45) oder es werden ausschließlich, teilweise sogar ausdrücklich voraussetzungslose Gegenstände gewählt (Wagenschein, s.S. 48/49). Im Mittelpunkt steht dann die sachlogische bzw. historische Entwicklung des Gegenstandes. Lediglich Wittenberg (s.S. 46/47) schenkt dem Problem mehr Beachtung, belässt es jedoch bei einer sehr allgemein gehaltenen Reflexion oder sieht die Rolle der internalen Lernvoraussetzungen wohl zu idealistisch als "mehr oder weniger ausgeformte (mathematische) (und damit "ausformbare" (?))Ideen...", nicht jedoch auch als Modelle, Konzepte..., die (bei Nichtbeachtung) zu störenden Interferenzen führen können.

Als einziger deutlicher und teilweise ausgearbeiteter Hinweis auf die Absicht eines konkreten Anschlusses an das Vorverständnis des Schülers in der Literatur zum genetischen Prinzip in der Mathematikdidaktik kann die Betonung des Problems der Unterrichtssprache, besonders deutlich bei Wagenschein, gesehen werden.

Dem Aspekt der Sprache (als auch Vorverständnis erschließendem Moment) im genetischen Mathematikunterricht ist deshalb ein eigener Abschnitt (S. 29-33) gewidmet. Die Auffassung Wagenscheins wird aus verschiedener Sicht gestützt und ergänzt (Whorf, Wygotski, Wittgenstein, v. Weizsäcker, Heisenberg, Born).

Eine unvergleichlich bedeutendere Stellung nimmt die Rolle der internalen Lernvoraussetzungen in den neueren kognitiven Theorien (Norman, Rumelhart, Dörner, s.S. 54ff.) wie auch in teilweise an diesen orientierten und mit deren Begriffen arbei-

tenden Untersuchungen im Bereich der Physikdidaktik ein (Jung u. a., Redecker, s.S. 49/50). Würde man solche Theorien systematischer zur Interpretation von Lernprozessen verwenden, so käme man zu anderen, oft sicher angemesseneren Deutungsmustern des kognitiven Geschehens im Unterricht. Dies konnte im Rahmen und bei der Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit jedoch nur angedeutet werden (s.S. 56-60). Denn neben dem diesbezüglichen theoretischen Defizitnachweis in der didaktischen Literatur und dem Anriß neuer Perspektiven für das genetische Prinzip ist die Hauptabsicht der Studie, ja der exemplarische empirische Nachweis von Umfang und Einfluß des Vorverständnisses.

Dies gelang über eine dreistufige Testbatterie und mit Mitteln der Fehleranalyse (Diskussion dieser Methode s.S. 66-69), ergänzt durch Schülerbefragungen. Bei den beiden untersuchten Lerneinheiten konnten jeweils einige "resistente" Fehl(prä)konzepte ermittelt werden, die teilweise sehr handlungsorientiert sind und den größten Teil der auftretenden Fehler erklärbar machen (s.S. 112 und 115/116). Verblüffend ist darüber hinaus der allgemein sehr hohe Kenntnisstand der Schüler vor der Behandlung der entsprechenden Lerneinheit (s. Tabellen und Graphiken S. 89-92, 101-104, s.S. 109, 113), der Unterricht in einem anderen Licht erscheinen läßt.

Es werden jedoch auch die Grenzen der verwandten Methode deutlich, insbesondere bei komplexen Aufgaben wie z.B. Textaufgaben (s.S. 74, 112f.).

Unmittelbar unterrichtspraktische Folgerungen zu ziehen konnte nicht Aufgabe der Arbeit sein. Es kann jedoch aus den vorliegenden Ergebnissen geschlossen werden, daß wirkliche "Genese", d.h. "Entwicklung der kognitiven Strukturen des Lernenden" nicht an dessen Vorverständnis (seinen Vorstrukturen) vorbeigehen kann; vielmehr braucht gerade solcher Unterricht ein diagnostisches Moment, bei dessen Verwirklichung vor allem die Fachdidaktik gefordert ist. Darüber hinaus eröffnet dies Perspektiven für ja gerade in letzter Zeit wieder stärker ins Blickfeld gerückte Maßnahmen innerer Differenzierung, die sozusagen quer zu allen Formen der Leistungsdifferenzierung liegen.

6. Anmerkungen

1) s. Scheurerl. H.: Die exemplarische Lehre, Tübingen 1964
s. Wagenscheins Entwicklung vom exemplarischen zum genetischen Prinzip

2) s. (Sammelband) Neber, (Hrsg.) Entdeckendes Lernen, Weinheim 1973
H. Freudenthal spricht von "gelenkter Wiederentdeckung", was die Absicht vieler genetischer Lehrgänge gut beschreibt (s. z.B. Freudenthal 1973, S.116).

3) s. gemeinsames Memorandum vom 65 amerikanischen und kanadischen Mathematikern von 1962 "On the mathematics curriculum of the High School" (in: MNU, 1962, Bd. 15 S. 225)

4) Wagenscheins Schrift "Zum Problem des genetischen Lehrens" (Wagenschein, 1965. Diese Schrift ist erst 1980 wieder in der von H. Ch. Berg herausgegebenen Sammlung von Schriften M. Wagenscheins mit dem Titel "Naturphänomene sehen und verstehen, Genetische Lehrgänge" aufgenommen.) Wittenbergs Aufsatze "Genetischer Mathematikunterricht" (Wittenberg 1964) und "Das genetische Unterrichtsprinzip" (Wittenberg 1968), sowie sein mathematikdidaktisches Werk "Bildung und Mathematik" (Wittenberg 1963), sind noch immer uneingelöstes Manifest bzw. Vermächtnis für eine Neuorientierung des Mathematikunterrichts am genetischen Prinzip.

5) Spirales Curriculum, an Lernvoraussetzungen der Schüler anknüpfen, Veranschaulichung und Erarbeitung auf verschiedenen Ebenen... (Bruner....) (s. auch z.B. die mathematischen Lehrbücher Gamma 5-10).

6) s. Leo Roth: Effektivität von Unterrichtsmethoden, 1972

7) s.u.a. L.S. Shulman: Strategic Sites for Research on Teaching. (1978)

8) Solche Lippenbekenntnisse wurden z.B. bei einer für die Bundesrepublik Deutschland repräsentativen Untersuchung des Max-Planck-Instituts für Bildungsforschung in Berlin aus dem Schuljahr 1969/70 deutlich. Hier sprachen sich bei einer Befragung knapp 80% der Mathematik-Gymnasiallehrer für eine Anwendung des genetischen Prinzips im Unterricht aus und meinten es auch anzuwenden, während sich anderen Stellen eines hierbei verwendeten Fragebogens entnehmen ließ, daß nur eine Minorität tatsächlich genetischen Unterricht durchzuführen scheint. (s. Hopf 1980)

9) z.B. Denkschrift der Deutschen Physikalischen Gesellschaft von 1979.

10) Wobei die Anerkennung und Verbreitung in der Mathematikdidaktik noch nichts über die Anerkennung und Verbreitung im Unterricht selbst sagt. (s. Kap.1 und Fußnote 8)

11) Diese sehr weitgreifende "Grundlage" auch als Ursache oder gar als alleinige Ursache zu sehen, wäre jedoch sicherlich falsch. Das genetische Prinzip im Mathematikunterricht als historisch bedingte Reaktion auf den traditionellen Mathematikunterricht des 19. Jahrhunderts zu sehen (Lenné 1969, S. 54 ff.), ist aber andererseits sicher zu eng und höchstens bzgl. einer zweiten "genetischen Welle" ab etwa 1880 (F.Klein u.f.) richtig. Die Entstehung des g.P.'s oder zumindest wichtiger Elemente, wie etwa dem der Selbsttätigkeit, ist vielmehr - wenn überhaupt als Reaktion - dann als eine solche auf das völlige Fehlen von Didaktik (außer "Vorlese- und Paukdidaktik") am Beginn des 17. Jahrhunderts zu deuten. Der Zeitpunkt der Entstehung des, wie verschiedenartig auch immer ausgeformten g.P.'s,fällt also mit der Entstehung der ersten umfassenden Didaktiken überhaupt zusammen, insbesondere der "Didacta magna" 1628/32 von Comenius.

Eine Hinwendung zum Menschen und damit zum einzelnen Schüler als lernendem Subjekt - ein weiteres Moment des g.P.'s - deutet sich ja bereits bei den Humanisten an (z.B. bei dem Spanier Juan Luis Vives (1492-1540), der bereits ein geschlossenes pädagogisches System entwickelte), wenngleich am Ausgang des Humanismus andere didaktische Realitäten stehen (Überbetonung der Rhetorik, Prunkreden usw.).

Ja, das vom mäeutischen Grundgedanken (geistige "Wiedergeburt" im Lernprozeß) geleitete sokratische Element im genetischen Prinzip, dem ja - allerdings in der Interpretation Nelsons (Leonard Nelson: Die sokratische Methode, Göttingen 1929) - bei Wagenschein eine bedeutende Rolle zukommt, reicht doch bis zu den Schriften Platons (s. Dialog des Sokrates mit dem Sklaven in "Menon") zurück.

12) Für Bacon und auch noch für Descartes waren Forschungsmethode und Unterrichtsmethode eins, da es in beiden Fällen um Erkenntnisgewinn geht, während z.B. Arnauld (nach Schubring s.u.) hier schon unterscheidet und bereits die Notwendigkeit des richtigen Wechselspiels von Induktion und Deduktion sieht.

13) didaktisch hier im weiteren Sinne, d.h. Methodik einschließend

14) In jeder Klasse des Gymnasiums wurden damals 6 Wochenstunden Mathematik unterrichtet, ein nie wieder erreichter Höchststand.

15) Dem Wirken Magers sind die Arbeiten von R. Weßler "Karl Mager und seine Strukturtheorie des Bildungswesens" (1969) und H. Kronen "Das Prinzip der Genese und der genetischen Methode in Pädagogik, Didaktik, Scholastik bei K.W.E. Mager" (1968) gewidmet; Bd. 2: "Wem gehört die Schule?" Karl Magers liberale Schultheorie (1981)

16) Mager war Anhänger der zu Anfang des 19. Jahrhunderts verbreiteten "kombinatorischen Schule", in deren Vor-

stellung die Mathematik in Kombinationen von Grundbegriffen, wie Eins, Zahl, Gleichung, Ungleichung und Summe sowie den sieben Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren bestand. Da diese Schule in der Mitte des 19. Jahrhunderts völlig ausstarb, gerieten mit ihr auch die mathematikdidaktischen Veröffentlichungen von Mager völlig in Vergessenheit. Außerdem war er ein bedeutender Theoretiker der aufblühenden Realschulen.

17) Auf das Fortwirken von Magers Gedankengut unter den Herbartianern ist Kronen (s.o.) genauer eingegangen.

18) Insbesondere die von den Gedanken Herbarts stark geprägte kulturhistorische Variante wird bei Ziller beherrschend. Während der kulturhistorische Zug jedoch bei Herbart durch die Suche nach dem Elementaren bestimmt ist, wird er bei Ziller und den Herbartianern zum alles umfassenden und ordnenden Prinzip (s. Schwager 1958, S. 61 f.).

19) Damit soll keineswegs jegliche Affinität zwischen formaler Bildung und dem genetischen Prinzip geleugnet werden; ist doch ein wesentliches Ziel des genetischen Prinzips auch methodische Bildung (s. heuristischer Aspekt, s. 2.2. und 2.3.).

20) Die Mathematik erlebte in dieser Zeit einen betrachtlichen Erkenntnisschub, wodurch die Forschung und Lehre an den Universitäten, in die die Gymnasiallehrerausbildung eingebunden war, und die Schulmathematik mehr und mehr auseinanderdrifteten (s. Schubring 1978, S. 137 f).

21) Die Parallelismushypothese zwischen Onto- und Phylogenese, oft auch biogenetisches Grundgesetz genannt, wurde 1866 von dem Darwinisten Ernst Haeckel so formuliert: "Die Formenreihe, welche der individuelle Organismus während seiner Entwicklung von der Eizelle bis zu seinem ausgebildeten Zustand durchläuft, ist eine kurze, gedrängte Wiederholung der langen Formenreihe, welche die tierischen Vorfahren desselben Organismus oder die Stammform seiner Art von den ältesten Zeiten der sogenannten organischen Schöpfung an bis auf die Gegenwart durchlaufen haben."
(nach O. Kuhn, Die Deszendenztheorie,Köln 1951)

Das biogenetische Grundgesetz soll schon lange vor Haeckel vertreten worden sein, nach Kuhn erstmalig durch Kielmeyer (1765-1844), es fand jedoch erst durch Haeckel im Zuge des aufblühenden Darwinismus allgemeine Verbreitung. (s. E. Haeckel: Prinzipien der generellen Morphologie der Organismen, Berlin 1866)

22) s. Alfred Pringsheim auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte 1897.
In: Pringsheim, A.: Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. VI, 1, 1898, S. 74 f.: "Ob es zweck-

mäßig erscheint, das Haeckel'sche Prinzip.... in dieser uneingeschränkten Weise auf eine Frage des Unterrichts zu übertragen, will mir keineswegs einleuchten. Ich meine, wir sollten doch gerade aus der Entwicklungsgeschichte der Wissenschaft lernen, die von früheren Generationen begangenen Schlußfehler oder Unzulänglichkeiten zu vermeiden."

23) Lietzmanns "Methodik des mathematischen Unterrichts", die viele Auflagen erlebte, beherrschte ja mindestens drei Jahrzehnte lang die Mathematikdidaktik (vgl. Lenné S. 18 ff., wo Lietzmanns Methodik als exemplarisches Material zur Analyse der traditionellen Mathematikdidaktik benutzt wird).

24) Wagenschein benutzt diesen Begriff, den Titel des letzten, unvollendeten Werkes von Simone Weil, häufig. Insbesondere zitiert er mehrmals eines von Simone Weils Beispielen für "Entwurzelung": den abrupt mit dem modernen astronomischen Weltbild konfrontierten polynesischen Bauernjungen (Weil 1956, S. 75)

25) Diese Beschreibung trifft für die letzten drei Jahrzehnte zu. Im Gegensatz dazu muß man jedoch weiter zurückgreifend den Reformstrang anders herum sehen: Das genetische Prinzip hat natürlich schon viel früher (vielleicht gar seit Comenius, spätestens aber seit Herbart) Bedeutung in der allgemeinen Didaktik der Volksschule und in der Methodik des Volksschul-Mathematikunterrichts gefunden. Auch Arbeitsschule und Reformpädagogik wurden ja im gymnasialen Raum weit weniger wirksam als dort.

26) Bei Wittmann (Wittmann 1981, S. 59 ff.) sind Bemühungen in dieser Richtung erkennbar, jedoch erst in allerersten Anfängen. Kognitionspsychologische Vorstellungen, vor allem an der Piagetschen Schule orientiert, und ein historisch wenig aufgearbeiteter Begriff vom genetischen Prinzip, stehen noch relativ unverbunden nebeneinander.

27) S.z.B.: Ziller, T.: Grundlegung zur Lehre vom erziehenden Unterricht, Leipzig 1884.

28) S.z.B.: Erziehung zur Humanität, Paul Geheeb zum 90. Geburtstag, Heidelberg 1960, S. 131 ff. Wagenschein spricht auch vom "kindheitsgenetische (n) Weg" und sagt in diesem Zusammenhang: "...daß eine im Sinne der Didaktik genetische Gedankenfolge sich mit dem geistesgeschichtlichen Weg nicht decken muß.... Der kindheitsgenetische Weg (....) ist nicht identisch mit dem menschheitsgenetischen." (Wagenschein 1970, S. 43)

29) So z.B. Paul la Cour in: Rein (Hrsg.): Encyklopädisches Handbuch der Pädagogik, 5. Bd., 1906, S. 814: "....Der historisch-mathematische Unterricht folgt dagegen einem natürlichen System: System, weil die Menschheit im großen und ganzen nicht unsystematisch gedacht hat, und natürlich, weil es dem einzelnen Menschen nicht unnatürlich sein kann, was der Menschheit natürlich gewesen ist."

30) Dies kann man bis jetzt nur hoffen!

31) In O. Toeplitz, "Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung I", 1949; wiederaufgegriffen z.B. in H.-J. Vollraths Aufsatz "Die Geschichtlichkeit der Mathematik als didaktisches Problem", 1968.

32) S. Fußnote 6

33) S. z.B. Wygotski 1977, insbesondere Kap. 5 und 6.

34) Der Sprachpsychologe Wygotski schreibt schon 1934: "Die Sprache ist nicht Ausdruck eines fertigen Gedankens...Das Denken wird im Wort nicht ausgedrückt, sondern erfolgt im Wort." (Wygotski 1977, S. 303)

35) Nicht nur in der obigen systematischen Differenzierung des genetischen Prinzips war Mager weiter als die meisten der ihm folgenden Vertreter dieses Prinzips, sondern auch in der Erkenntnis dessen, daß eine genetische Pädagogik einseitig bleibt, wenn sie die "naturgemäße Entwicklung" der Anlagen durch die "naturgemäße Methode" verfolgt und "dabei die Wirklichkeit außer acht läßt, in der der Zögling steht." (Mager zitiert nach Kronen S. 90)

36) Personengenese ist sozusagen "Bildungsziel", das den Bildungsprozeß nicht mit einschließt.

37) Strukturgleichheit von wissenschaftlichem und schulischem Erkenntnisprozeß bei Bruner

38)

39) Diese u.a. Maximen sind als Maximen nicht neu; so beschreibt M. Wagenschein im Anhang II zu "Verstehen lehren" (Wagenschein 1968, S. 102 f.) als "genetische Faustregeln": "8. Regel:.... Erst die Langsamen, dann die Schnellen. Das kann leicht mißverstanden werden....Es bedeutet: Das Gespräch aller miteinander so führen, daß das Verständnis der Schnellen (oft Voreiligen und Oberflächlichen) sich an den Nachdenklichkeiten der Langsamen (oft nur Bedächtigen und Besonnenen) mißt. 9. Regel:..... Erst die Mädchen, dann die Jungen..... die Mädchen dafür sorgen lassen, daß die Jungen die Abstraktionen nicht abspalten, statt sie anwachsen (ausgliedern) zu lassen."

40) Aus dieser vorläufigen Erkenntnis verschiedener "Genesetypen" muß nicht notwendig äußere, ja nicht einmal notwendig innere Differenzierung im engeren Sinne folgen. Vielmehr können, ja sollten, verschiedene Vormodelle etc. durchaus auch im gemeinsamen Unterricht aufgegriffen werden, in gemeinsamen Unterricht münden und dort durchbrochen oder fortgeführt werden.

41) "internale Lernvoraussetzungen" wird synonym mit "Vorverständnis" gebraucht, bezeichnet jedoch vielleicht genauer, daß damit alle vom Schüler am Anfang einer neu-

en Lerneinheit auf diese angewandten kognitiven Strukturen gemeint sind (s. Ende des Kap.), d.h.: Vorkenntnisse, Schemata, Präkonzepte, Vorbildung, Vorwissen, Vormodelle, Vorstrukturen (bereits vorhandene Modelle und Strukturen). Um wieder informationstheoretische Sprechweisen zu benutzen: Die gesamte bereits beim Schüler vor Eintritt in die Lerneinheit vorhandene epistemische und heuristische Struktur, die auf diese Lerneinheit angewendet werden kann bzw. angewandt wird. Damit ist ein Ausschnitt aus der gesamten kognitiven, affektiven und sozialen Ausgangslage des Schülers beschrieben. (s.Dörner 1976)

42) Nach Langeveld werden frühere Potenzen nicht einfach durch neue abgelöst, sondern bleiben als Möglichkeiten erhalten. Langeveld schreibt: "So entsteht in der psychischen Entwicklung eine Schichten-Struktur, in der die verschiedenen Schichten ebenfalls zur Verfügung bleiben, obwohl die "höher" gelegenen Niveaus eine geordnete Beherrschung der Wirklichkeit möglich machen auf eine Weise, die abstrakter und bewußter als das niedriger Gelegene ist... Man könnte das das Prinzip der genetischen Schichtung nennen..." (Langeveld 1964, S. 87) Zur Ausformung dieser Idee bei Wagenschein (Vergleich mit den Schichten eines Baumes...) s. auch Könnlein 1973, S. 425, 429.

43) s. hierzu z.B. Wagenscheins genetisches Unterrichtsbeispiel "Zum Nichtabbrechen der Primzahlfolge" in Wagenschein 1970, S. 102-110.

44) In "Neue Sammlung" 4/1964 erschienen und gleichzeitig die Übersetzung der leicht gekürzten Einleitung des Buches "Redecouvrir les mathematiques, exemples d'enseignement genetique" des gleichen Autors, Neuchatel 1963.

45) Whitehead in "The Aims of Education", London 1962.

46) vgl. in diesem Zusammenhang die Bedeutung, die Copei (Copei 1950) der Erzeugung der "rechten Fragehaltung" beimißt. Auch er spricht übrigens schon - wie Wittenberg und Wagenschein - davon, daß solcher Unterricht, der auf "fruchtbare Momente" abzielt, "nicht methodisierbar" sei. (Dahinter steht auch die weitverbreitete allgemeine Ablehnung einer "Bildungstechnologie".)

47) Bei allen diesen Beispielen ist die - zumindest in der Auffassung Wagenscheins - relative Voraussetzungslosigkeit offensichtlich. Die Unterrichtsbeispiele aus der Physik haben allerdings oft wesentlich verschränkteren Charakter.

48) z.B.: Jung, W.; Wiesner, H.; Engelhardt, P.: Vorstellungen von Schülern über Begriffe der Newtonschen Mechanik. Empirische Untersuchungen und Ansätze didaktisch-methodischer Folgerungen. (Bad Salzdetfurth 1981)

Maichle, U. (Arbeitsgruppe Jung): Verstehens- und Lernprozesse im Elektrolenreunterricht der Sekundarstufe I aus kognitionspsychologischer Sicht. In: Der Physikunterricht, Heft 4, 1980. Als Versuch einer Zusammenschau (mit weiteren Verweisen): Redeker, B.: Zur Bedeutung des Vorverstandnisses für das Lernen von Physik. In: physica didactica2/1981, S. 107-120.

49) So sagt Jung z.B.: "Lernen besteht im Aufbau semantischer Netzwerke bzw. in ihrer Veränderung. Solche Netzwerke scheinen gegenwartig aber nur lokal rekonstruierbar zu sein". (Jung 1981a, S.433)

50) "Rahmen" ist hier im Sinne von bedeutungsverleihendem Rahmen oder begrifflichem Bezugssystem (Alltag, Physikunterricht...) gemeint. Naheres zu diesem Begriff s. Goffman, E.: Rahmen-Analyse. Ein Versuch über die Organisation von Alltagserfahrungen, Frankfurt/M. 1977.

51) In der modernen Mathematikdidaktik ahnlich als "dynamisches" (Dienes) oder "handlungsbezogenes" (Griesel u.a.) Prinzip zu finden.

52) Piaget meint damit offensichtlich die Tatsache, daß die Griechen zwar schon indirekt (etwa beim Lösen Diophantischer Gleichungen) mit negativen Zahlen gerechnet ("operiert") haben, aber für solche Zahlen und den Umgang mit diesen keine eigene Symbolik sowie formale Regeln entwickelt haben ("formalisierend").

53) Und als solche werden von Schülern auch des 7. Schuljahres oft auch negative Zahlen (-5-1) aufgefaßt. (eigene Anmerkung (s.u.))

54) Hier im Sinne von "operativ" gebraucht.

55) Vielleicht aber auch noch durch das allgemein weit verbreitete Operatorkonzept gefördert wird.

56) Hier meint Dörner immer das Langzeitgedächtnis, auf das der Zugriff über die Sinne, den sensorischen Speicher und das Kurzzeitgedächtnis erfolgt. Im Langzeitgedachtnis laufen aber alle Denkvorgange und entsprechende Handlungssteuerungen ab, die beim Aufgaben- und Problemlösen (zur Unterscheidung s. Dörner 1976, S. 10f.) erforderlich sind. (s. Dörner 1976, S. 28f.)

57) Dieses "Abgeschlossenheitsprinzip" wird scheinbar auf negative Zahlen übertragen und ist in noch starkerem Maße bei Multiplikationsaufgaben der Form $(-x)\cdot(-y)=...$ zu beobachten. Hier setzten im Vortest 64% der untersuchten Schüler ein Minuszeichen vor das Ergebnis (s. Kap. 4)

58) Die allermeisten Schüler kennen bereits negative Zahlen, ja sogar deren Anordnung.

59) Die Eröffnung einer empirisch begründeten Vermittlungsmöglichkeit in oben angesprochener Funktion (s.auch 3.) ist jedoch zur Fundierung des (ja vor allem für den

Mathematikunterricht proklamierten)genetischen Prinzips besonders dringend.

60) Auszüge aus den Lernzielkatalogen der RRL zu den betrachteten Unterrichtseinheiten s. 4.4.1.. Zuordnungen der Testaufgaben zu den Lernzielen s. 4.4.2..

61) , die bei weitentwickelten Tests auf ein Mindestmaß reduziert werden können,

62) Dies ist im vorliegenden Fall noch nicht gegeben.

63) im Sinne von 2.3. und 3.

64) was im allgemeinen zu einer Beschränkung auf Einzelfallstudien zwingt.

65) "Fehleranalysen im Mathematikunterricht" (1980) und "Schülerfehler im mathematischen Lernprozeß" (IDM 19/1979, Kap. 3, S. 57-88)

66) "Innere Differenzierung des Unterrichts" (Roth 1976)
Klafki, W., Stöcker, H.: Innere Differenzierung des Unterrichts, in: Zeitschrift für Pädagogik, Heft 4, 1976, S. 497-523

67) "Probleme der Differenzierung im Mathematikunterricht" (IDM 17/1978)
s. auch Hopf, D.: Differenzierung in der Schule, Stuttgart, $_2$1976

68) Schon Herbart sah solche Zusammenhänge zwischen dem vorhandenen Begriffssystem (bei ihm "Vorstellungen" oder "Bewußtseinsinhalte" genannt) und neu zu Lernendem, indem er für die Art, wie neue "Vorstellungen" durch ältere angeeignet werden, den Begriff "Apperzeption" benutzt. Ausubel deutet dies in etwas anderer Weise als "Konzeptassimilation" (s. z.B. Ausubel 1974, S. 567 ff.)

69) s. z.B. Radatz 1980, S. 37-55.

70) Insbesondere die Rolle der "Gedächtnisprozesse beim Anknüpfen an bisherige Erfahrungen, Kenntnisse und Fertigkeiten"(Radatz 1980 a, S. 35) ist höchstens von Kagan/Kogan (1970) gesehen, aber auch nicht weiter verfolgt worden.

71) s. Vorwort sowie Lisa Hefendehls Aufsatz "Bei minus, da geht's anders herum" in Bauersfeld 1978, S. 65 ff.

72) Für den ebenfalls sehr interessanten Bereich der Geometrie müßte ein stark verändertes Untersuchungsinstrumentarium entwickelt werden.

73) Daß die Verhältnisse hier sehr verwickelt sind, zeigen mehrere Untersuchungen über Textaufgaben, bei denen die Verfasser aus ähnlichen Gründen teilweise große methodische Schwierigkeiten hatten und von denen an dieser Stelle nur eine zitiert sei:
"There are really numerous instances in which the key

words in the verbal formulation of a problem can serve as cues which lead directly to the mathematical operation required for solution. However, there are many other instances in which the same key words might act as distractor: i.e., might lead the solver to a mathematical operation (currently associated with them) which is not the one required for solution." (Nesher, P. und Teubal, E. 1975, S. 43) (s.auch: Nesner,P. 1976; Nesher, P. und Katriel, T. 1977; Paige, J.M. und Simons, H.A. 1966 sowie die gleichzeitig mit dieser Arbeit erschienene Dissertation von J. Polster.)

74) Möglicherweise ist dies ein Zeichen dafür, daß das von Handlungsvollzügen am weitesten entfernte, relativ abstrakte Metamodell der Zahlengeraden am ehesten beim Aufbau erweiterter kognitiver Strukturen hilft.

75) Aus technischen Gründen mußte die Klasse D (additive Gesamtschule) bei dieser Lerneinheit durch eine andere Klasse (E) (ebenfalls additive Gesamtschule) ersetzt werden.

76) Eine mögliche Ursache liegt in dem ausgesprochen ländlich strukturierten Einzugsbereich dieser Schule, die andere Umwelterfahrungen der Schüler wahrscheinlich macht. Die übrigen beiden Schulen liegen im Großraum Frankfurt.

77) Ein deutlicher Hinweis auf mangelnde Übung und damit die Notwendigkeit ausgearbeiteter Übungsverfahren (s. dazu auch J. Diederich: "Das Üben planen?" In: Westermanns pädagogische Beiträge 10/1978)

7. Literaturverzeichnis

AEBLI, Hans: Grundformen des Lehrens, Stuttgart 1961

AUSUBEL, David, P.; ROBINSON, Floyd G.: School learning (An Introduction to Ed. Psych.),London, New York 1969

AUSUBEL, David, P.: Psychologie des Unterrichts Bd. 1/2, Weinheim 1980/81

BACON, Francis: Neues Organ der Wissenschaften, Darmstadt 19

BAUERSFELD, Heinrich: Forschung zum Prozeß des Mathematiklernens (Materialien und Studien, Bd.2), Bielefeld 1976. Einführende Bemerkungen zum Problem der Anwendung psychologischen Wissens (Technologieproblem, Materialien und Studien Bd. 4), Bielefeld 1976

BAUERSFELD, Heinrich (Hrsg.): Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht, Hannover 1978

BECKER, Gerhard: Das Exemplarische im mathematischen Unterricht, Aachen 1971

BIRKHAN, G.: Analyse von Denkfehlern in der Mathematikdidaktik als kognitionspsychologisches Untersuchungsinstrument. In: Komplexe menschliche Informationsverarbeitung, S. 495-502, Bern 1979

BÖLTS, Hartmut: Kritik einer Fachdidaktik . Eine ideologiekritische Analyse der gegenwartigen Mathematikdidaktik in der BRD, Weinheim/Basel 1978

BREITING, S., HUMMEL, J., STRÜNCK, H.-J.: In: Genetische Methode im Mathematikunterricht? Arbeitsergebnisse aus dem Lehrgang RWS 36/101/81, S. 89-93 (Nur über das hessische Institut für Lehrerfortbildung, Fuldatal/Kassel erhältlich.) Fuldatal/Kassel 1981

BRÜNHUBER, Paul: Lernen durch Entdecken, Donauwörth ^{2}1974

BUSSMANN, Hans: Erkenntnis und Unterricht - Zur Genese mathematischer Fähigkeiten, In:Unterrichtswissenschaft (2, 1980) S. 105-123

CHOMSKY, Noam: Reflections on Language, London 1976

COPEI, Friedrich: Der fruchtbare Moment im Bildungsprozeß, Heidelberg 1950

DAHNKE, H. (Hrsg.): Zur Didaktik der Physik und Chemie (Tag. Did.d.Ph./Ch.), S. 66-71: Barz, W.; Riesch, W.; Westphal, W.: Interviews mit Schülern, am Beispiel von Untersuchungen von Lernvoraussetzungen für Physikunterricht, Göttingen 1973

DESCARTES, R.: Von der Methode, Hamburg 1960

DEWEY, John: How we think, Boston 1910 (Dt.: Wie wir denken, Zürich 1951)

DIETRICH, Theo (Hrsg.): Die pädagogische Bewegung "Vom Kinde aus", Bad Heilbrunn 1973

DÖRNER, Dietrich: Problemlösen als Informationsverarbeitung, Stuttgart 1976

FLÜGGE, Johannes (Hrsg.): Zur Pathologie des Unterrichts, Bad Heilbrunn 1971

FREUDENTHAL, Hans: Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht, München 1978

FREUDENTHAL, Hans: Mathematik als pädagogische Aufgabe; Bd. I, II, Stuttgart 1973

FRIES, Eberhard, ROSENBERGER, Rudi: Forschender Unterricht, Frankfurt/M. 1967/1976

FROMM, Erich: Haben oder Sein, Stuttgart $_{6}$1980

GATTEGNO, C.: The Mistakes in the Teaching of Mathematics. Zusammengefaßt in: Wolff, G., (Hrsg.) Handbuch der Schulmathematik, Bd. 5, Hannover 1969 S.259-262

GEHEEB, Paul: Erziehung zur Humanität, Paul Geheeb zum 90. Geburtstag (Hrsg. v. Mitarb. d. OWS, Red. Eva Cassirer), S. 131-154, Heidelberg 1960

HABERMAS, Jürgen: Umgangssprache, Bildungssprache, In Merkur, Heft 4/1978

HART, K.M. (Ed., CSMS Team): Children's Understanding of Mathematics: 11-16, Oxford 1981

HEIPCKE, Klaus u.a.: Mathematikunterricht und Lebensgeschichte, In: Westermanns Päd. Beiträge Heft 10, 1978

HEISENBERG, Werner: Der Teil und das Ganze, München 1979

HERMANN, G.: Learning by discovery. A critical review of studies, In: The Journal of Experimental Education, 38, 1969, S. 58-72

HOLT, John: Wie Kinder lernen, Weinheim 1971

HOPF, Diether: Mathematikunterricht. Eine emp. Unters. z. Did. und Unterrichtsmethode i. d. 7. Klasse des Gymnasiums, Stuttgart 1980

JUNG, W.: Zum Problem der Schülervorstellungen, In: Physica didactica 1978, S. 125-145 und S. 231-247

JUNG, W.: Zum Anfangsunterricht in Optik: Untersuchungen und didaktische Konsequenzen, In: Vorträge der Frühjahrstagung 1981 der Deutschen Physikalischen Gesellschaft, Fachausschuß Didaktik der Physik, Gießen 1981, S. 433-439

JUNG, W. (Hrsg.): physica didactica, 2. Themenheft 1980: Piaget und Physikdidaktik, Bad Salzdetfurth 1980

KAGAN, J.S., KOGAN, N.: Individuality and Cognitive Performance, In: Mussen (Ed.): Carmichael's Manual of Child Psychology, New York $_{3}$1970

KARASCHEWSKI, Horst: Mathe. als erste Fremdsprache - Fragen an die Mathematik in der Grundschule, In: Neue Sammlung 3/1970, S. 290-306

KIRSCH, Arnold: Elementare Zahlen- und Größenbereiche, Göttingen/Zürich 1970

KIRSCH, Arnold: Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht, In: Westermanns Pädagogische Beiträge, Heft 4, 1977, S. 151-157

KLAFKI, Wolfgang: Das päd. Problem der Elementaren und die Theorie der kategorialen Bildung, Weinheim $_4$1963

KLAFKI, W.; STÖCKER, H.: Innere Differenzierung des Unterrichts, In: Zeitschrift für Pädagogik 4/1976, S.497-523

KLEINSCHMIDT, Gottlieb: Erste Untersuchungen über den mathematischen Lernprozeß, In: Neue Unterrichtspraxis (1970), S. 95-98

KLINE, Morris D.: Warum Hänschen nicht rechnen? Das Versagen der Neuen Mathematik, Weinheim 1974

KÜHNLEIN, Walter: Die Pädagogik Martin Wagenscheins, Erlangen 1973

KRONEN, Peter Heinrich: Das Prinzip der Genese und der genetischen Methode in Pädagogik, Didaktik, Scholastik bei K.W.E. Mager, Köln 1968 (Bd. 2, 1981)

LAKATOS, I., MUSGRAVE, A. (Hrsg.): Kritik und Erkenntnisfortschritt, Braunschweig 1974

LAKATOS, I.: Beweise und Widerlegungen (engl. 1972), Braunschweig 1979

LANGEVELD, Martinus J.: Studien zur Anthropologie des Kindes Tübingen 1964

LANKFORD, F.G.: Some Computational Strategies of Seventh Grade Pupils, University of Virginia 1972

LEFRANCOIS, Guy R.: Psychologie des Lernens, Berlin 1976

LENNÉ, Helge: Analyse der Mathematik-Didaktik in Deutschland, Stuttgart 1969

MAGER, Karl W.E.: Die Encyklopädie oder das System des Wissens...und Lesebuch zur Encykl., Zürich 1847

MAGER, Karl W.E.: Die genetische Methode des schulmäßigen Unterrichts in fremden Sprachen und und Litteraturen, Zürich 1846

MERTEN, Susi: Konrads Weg zu den Zahlen, In: Neue Sammlung 10/1970, Heft 3, S. 307-315 und Heft 4, S. 427-436

MESSNER, R.: Planung des Lehrers und Handlungsinteressen des Schülers im offenen Unterricht, In: Westermanns Päd. Beiträge (30) 1978, S. 145-150

NEBER, Heinz (Hrsg.): Entdeckendes Lernen, Weinheim 1973 (Beltz)

NESHER, P.: Three Determinants of Difficulty in Verbal Arithmetic Problems, In: Educational Studies in Mathematics 7 (76), S. 369-388

NESHER, P.; KATRIEL, T.: A semantic Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in Arithmetic, In: Ed. Stud. i. Math. 8 (77), S. 251-269, Schlüsselwörter bei Add./Subtr. S. 261 Fußnote

NESHER, P.; TREUBAL, E.: Verbal Cues as an Interfering Factor in Verbal Problem Solving, In: Ed.St. in Math. (6) 1975, S. 41-51

NORMAN, D.A.; RUMELHART, D.E.: Strukturen des Wissens, Stuttgart 1978

OTTE, Michael (Hrsg.): Mathematiker über die Mathematik, Berlin 1974 (Springer)

PAIGE, J.M.; SIMON, H.A.: Cognitive processes in solving algebra word problems, In: Kleinmuntz, B.: Problem solving New York 1966, S. 19-51

PIAGET, Jean: Einführung in die genetische Erkenntnistheorie, Frankfurt 1973

PIAGET, Jean: Abriß der genetischen Epistemologie, Freiburg 1974

PIAGET, Jean: Die Entwicklung des Erkennens I: Das mathematische Denken, Stuttgart 1975

PIAGET, Jean: Die Entwicklung des Zahlbegriffs, Gesammelte Werke, Bd. 3, Stuttgart 1975

POLSTER, Jürgen: Fallstudien zu Mathematisierungsprozessen beim Lösen von Textaufgaben, Frankfurt 1982

RADATZ, Hendrik: Fehleranalysen im Mathematikunterricht, Braunschweig 1980

REDEKER, B.: Zur Bedeutung des Vorverständnisses fur das Lernen von Physik, In: physica didactica 2/1981, S. 107-120

REISMAN, F.K.: Diagnostic Teaching of Elementary School Mathematics, Chicago 1977

RÉNYI, Alfréd: 1. Dialoge über Mathematik, Basel/Stuttgart 1967, 2. Sokratischer Dialog, In: Neue Sammlung 1966 S. 284/ff

RESNIK, Lauren B.: Task analysis in instructional design, Pittsburg 1974

RIEDEL, Klaus: Lehrhilfen zum entdeckenden Lernen, Hannover 1973

ROTH, Leo: Effektivität von Unterrichtsmethoden, Hannover ^{3}1977

RUMPF, Horst: Unterricht und Identität, München 1976

SCHEUERL, Hans: Die exemplarische Lehre, Sinn und Grenzen eines did. Prinzips, Tübingen 1964

SCHUBERTH, Ernst: Die Modernisierung des mathematischen Unterrichts, Stuttgart 1971

SCHUBERTH, Ernst: Der Mathematikunterricht in den Waldorfschulen als Alternative zu bestehenden Konzepten. Ein Beitrag zur entwicklungspsychologischen Begründung des Mathematikunterrichts, In: Erziehungskunst 5/75, S. 185-195

SCHUBRING, Gert: Das genetische Prinzip in der Mathematikdidaktik (Diss.), Bielefeld 1978

SCHUBRING, Gert: Dokumentation der Mathe.-Lehrpläne, Bielefeld 1977

SCHWAGER, Karl-Heinz: Wesen und Formen des Lehrgangs im Schulunterricht, Weinheim 1958

SEEMANN, J.: Die Rechenfehler. Ihre psychologischen Ursachen und ihre Verhütung, Langensalza 1931

SHULMAN, Lee S. (Hrsg.): Learning by discovery. A Critical Appraisal, Chicago $_2$1968

STEGMÜLLER, Wolfgang: Hauptströmungen der Gegenwartsphilosophie. Eine kritische Einführung, Stuttgart $_6$1978/ $_6$1979, (Bd. I, II)

STEGMÜLLER, Wolfgang: Sprache und Logik, In: Studium Generale IX 2, S. 74ff (1956)

TOEPLITZ, Otto (bei KÖTHE, G. (Hrsg.)): Die Entwicklung der Infinitesmalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode, Berlin 1949

VOLLRATH, Hans-Joachim: Die Geschichtlichkeit der Mathematik als didaktisches Problem, In: Neue Sammlung 8/1968

WAGENSCHEIN, Martin: Verstehen lenren, Weinheim 1968

WAGENSCHEIN, Martin: Ursprüngliches Verstehen und exaktes Denken Bde. I/II, Stuttgart 1965/1970

WAGENSCHEIN, Martin: Die pädagogische Dimension der Physik, Braunschweig 1962

WAGENSCHEIN, Martin: Entdeckung der Axiomatik, In: Der Mathematikunterricht 1/1974, S. 52-70

WAGENSCHEIN, Martin: Natur physikalisch gesehen, Braunschweig 1975

WAGENSCHEIN, Martin; BANNHOLZER, A.; THIEL, S.: Kinder auf dem Wege zur Physik, Stuttgart 1973

WEIL, Simone: Die Einwurzelung, München 1956

WEINERT, F.: Analyse und Untersuchung von Lehrmethoden, In: Ingenkamp, K. und Parey, E. (Hrsg.), Handbuch der Unterrichtsforschung, Teil 2, S. 1217-1352, Weinheim $_2$1972

WEINERT, F.: Entwicklungsgemäßer Unterricht, Probleme der Anpassung des Unterrichts an den kognitiven Entwicklungsstand der Schüler, In: Unterrichtswissenschaft 1/1977, S. 1-13

WEINERT, F.E.; SIMONS, H.; AHRENS, H.J.: Der direkte Einfluß kognitiver und motivationaler Bedingungen auf Schul-

leistungen, In: W.H. Tack (Hrsg.): Bericht über den 29. Kongreß der deutschen Gesellschaft für Psychologie in Salzburg 1974, Göttingen 1975, S. 215-219

WEIZSÄCKER, Carl Friedrich v.: Die Sprache der Physik, In: Sprache und Wissenschaft. Vorträge gehalten auf der Tagung der Joachim Jungius-Gesellschaft der Wissenschaften, Hamburg a. 29./30.10.1959, Göttingen 1960 S. 137-153

WEßLER, Robert: Karl Mager und seine Strukturtheorie des Bildungswesens, Weinheim 1969

WHITEHEAD, A.N.: The aims of education and other essays, London 1962

WHORF, Benjamin Lee: Sprache, Denken, Wirklichkeit, Beiträge zur Metalinguistik und Sprachphilosophie, Hamburg 1979

WINTER, H.: Umgangssprache - Fachsprache im Mathematikunterricht, In: Schriftenreine des IDM 18, Bielefeld 1979, S. 5-56

WITTENBERG, Alexander, Israel: Das genetische Unterrichtsprinzip, In: Neue Sammlung (8) 1968, S. 105-108

WITTENBERG, Alexander, Israel: Genetischer Mathematikunterricht, In: Neue Sammlung (4) 1964, S. 210-216

WITTENBERG, Alexander, Israel: Bildung und Mathematik, Stuttgart 1963

WITTENBERG, Alexander, Israel: Vom Denken in Begriffen; Mathe. als Experiment des reinen Denkens, Stuttgart/ Basel 1957

WITTGENSTEIN, Ludwig: Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik, Frankfurt/M. 1974

WITTGENSTEIN, Ludwig: Philosophische Untersuchungen, Frankfurt/M. 1977

WITTGENSTEIN, Ludwig: Tractatus, Frankfurt/M. 1980

WITTOCH, Margarita: Neue Methoden im Mathematikunterricht, Hannover 1973

WITTMANN, Erich: Infinitesimalrechnung I und II in genetischer Darstellung, Ratingen 1973

WITTMANN, Erich: Grundfragen des Mathematikunterrichts, Braunschweig 1974/6 1981

WYGOTSKI, Lew S.: Denken und Sprechen, Frankfurt/M. 1981

ZIMBRICH, Fritz: Sokratisches Lernen - noch einmal, In: Neue Sammlung 2/79, S. 205-221

Anhang 1: Testaufgaben und Fehlertabelle zur Vorstudie "Ganze und rationale Zahlen"

Aufg. Nr.	Aufgabe VT/NT	ST	richtig (%) VT	ST	NT	Fehlertyp Anzahl VT (N=27)	ST (N=25)	NT (N=26)
1	3-6=	4-7=	92,6	100	100	3 2		
2	-8+3=	-7+4=	88,9	80	92,3	3 -11 11	-11 +11	-11
3	-7-4=	-6-5=	70,4	48	76,9	1 1 -3 +3 11 6 1 1	4 1 -1 +1 11 2	2 -3 +3 4 2
4	4-10+2=	5-11+2=	81,5	96	92,3	-8 4 1 4 1	+8 1	+8 2
5	$\frac{1}{2}-3=$		70,4	84	100	25 -35 -8 -15 2 2 1 1	7/2 9/2 3 2 1 1	
6	-1,5-0,3=	-1,4-0,2=	55,6	56	69,2	12 12 18 6 2 1	-12 1/2 16 7 1 1	-12 18 +12 4 2 1
7	-2,1+0,4=	-2,3+0,5=	59,3	96	65,4	25 61 +21 17 5 1 1	-17 28 1 1	-25 13 17 37 4 2 1 1
8	(-1)-(-2)=(-2)-(-3)=		40,7	52	76,9	3 -1 4 11 1 1 2	+5 -1 -5 7 2 1	-3 -1 +3 3 1 1
9	(+1)-(+2)=(+1)-(+3)=		85,2	88	96,2	1 2 1	+2 -1 2 1	+1 1
10	(-2)-(+3)=(-3)-(+4)=		29,6	60	65,4	1 -1 -4 -2 3 13 1 1	+1 -1 8 1	+1 -1 1 7 1
11	(-4)+(-2)=(-5)+(-2)=		59,3	68	80,8	2 +6 1 9 1	+7 -7 +3 5 2 1	+6 1 4
12	2·(-3)=	3·(-2)=	74,1	92	92,3	+3 5 -3 6 2 1 1 1	-5 1	-9 6 1
13	(-4)·3=	(-3)·6=	74,1	92	100	+8 12 1-2 2 2 1 1	-1/2 1 1	
14	(-5)·(-2)=(-3)·(-5)=		14,8	92	100	10 1 +5 17 1 1	+8 1 1	
15	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)=(-\frac{2}{3})\cdot(-3)=$		14,8	72	92,3	1 -2 +3 5 1 1 1	1/3 4/3 4/9 +3 +2/3 3 1 1 1	-1 2
16	$\frac{-6}{2}=$	$\frac{-8}{2}=$	66,7	84	92,3	12 0 3 2 5 2 1 1	3	3 2
17	(-8):4=	(-6):3=	77,8	84	96,2	3 2 1 3	18 +2 -3 2 1 1	
18	5:(-10)=	4:(-8)=	7,4	60	84,2	2 -10 1,5 5 -51/4 4 11 3 2 1 1 1	2 +2 -1/2 3 4 2 1	-2 1 3
19	$\frac{-12}{-4}=$	$\frac{-15}{-5}=$	22,2	76	96,2	3 0 -46 7 14 1 1	3 -3 3	-3 1
MW (%)			57,1	77,9	87,4			

VT=Vortest ST=Schlußtest NT=Nachtest

Anhang 2: Einige Einzelfallstudien zur Lerneinheit "Ganze und rationale Zahlen" und Leistungsentwicklungen zu den beiden untersuchten Lerneinheiten.

Die Thesen der Arbeit werden auch durch Einzelfallstudien erhärtet, von denen nun einige zur obigen Lerneinheit folgen.

Zunächst soll jedoch mit Hilfe einiger Tabellen ein Überblick über die Verteilung verschiedener Leistungsentwicklungs-"Typen" gegeben werden. Zum Vergleich folgen jeweils die entsprechenden Verteilungen bei der Lerneinheit "Zuordnungen". Die Zeichen "$\cap$", "$\curvearrowright$", ... symbolisieren qualitativ die verschiedenen Typen von Leistungsentwicklung, z.B.:

$\cap$: Ansteigen der Punktzahl im Schlußtest, Abfall im Nachtest

$\curvearrowright$: Ansteigen der Punktzahl im Schlußtest, im Nachtest gleichbleibend.....

Von diesen verschiedenen Entwicklungstypen und Vortest-Leistungsgruppen werden in den Einzelfallstudien zwei herausgegriffen:

Fallstudien 1...6: Entwicklungstyp "$\cap$"
Fallstudien 7..10: Hohe Vortest-Leistung

Bei den halbtabellarischen Einzelfallstudien sind jeweils nur Auslassungen und Fehler, nicht jedoch die richtigen Ergebnisse eingetragen.

Bei der Gruppe mit hoher Vortest-Leistung fällt statistisch auf:

1. 60% der Fehler im Vortest finden sich hier bei den Aufgaben 17, 18, 21 und 22, weitere 23% bei den Aufgaben 11 und 13, d.h. im Gegensatz zu den anderen Leistungsgruppen kaum Fehlkonzepte bei den Aufgaben 1 bis 10.

2. Das noch dazu Gelernte wird besser behalten (Durchschnittswerte der Punkte VT/ST/NT: 22,8/25,4/26,7; vgl. dagegen Gesamtergebnisse: 17,8/24,9/24,4).

Leistungsentwicklungstypen Lerneinheit "Z/Q"

Klasse \ Entwicklungs-Typ	∩	⌜	⟋	∪	⟍	Σ
A	16	5	6	-	-	27
B	4	5	10	1	1	21
C	14	6	8	1	-	29
D	11	6	7	2	-	26
Σ	45	22	31	4	1	103

Leistungsentwicklungstypen Lerneinheit "Zuordnungen"

Klasse \ Entwicklungs-Typ	∩	⌜	⟋	∪	⟍	—	⌝	Σ
A	4	7	8	2	1	1	1	24
B	1	4	-	4	1	4	3	17
C	7	7	7	4	-	1	-	26
D	5	8	15	4	-	-	-	32
Σ	17	26	30	14	2	6	4	99

Aufgliederung nach Vortest-Leistung zu "Z/Q"

Vortest-Leistung \ Entwicklungs-Typ	∩	⌜	⟋	∪	⟍	Σ
gering (weniger als 50%)	9	1	5	-	-	15
mittel (50 bis 75%)	32	13	20	2	1	68
hoch (mehr als 75%)	4	8	6	2	-	20
Σ	45	22	31	4	1	103

Aufgliederung nach Vortest-Leistung zu "Zuordnungen"

Vortest-Leistung \ Entwicklungs-Typ	∩	⌜	⟋	∪	⟍	—	⌝	Σ
gering (s.o.)	6	6	12	3	-	-	-	27
mittel (s.o.)	6	12	12	2	-	-	1	33
hoch (s.o.)	5	8	6	9	2	6	3	39
Σ	17	26	30	14	2	6	4	99

Den Tabellen zur Leistungsentwicklung ließen sich sicherlich eine Reihe interessanter Ergebnisse entnehmen, von denen an dieser Stelle nur auf einige eingegangen werden soll.

Bei der Lerneinheit "Z/Q" stehen 53 erwünschten 50 unerwünschte Lernverläufe gegenüber, bei der Lerneinheit "Zuordnungen" 56 erwünschten 43 unerwünschte, eine weitere Bestätigung der These, daß unser Mathematikunterricht oft nur kurzfristige Erfolge zeigt. Allerdings liegt der Anteil der Schüler vom Entwicklungstyp " ⌒ ", möglicherweise wegen der stärkeren Umweltbezüge und der damit verbundenen größeren Haftiefe, bei der Lerneinheit "Zuordnungen" mit 17 von 99 Schülern wesentlich geringer als bei der Lerneinheit "Z/Q" mit 45 von 103 Schülern. Andererseits zeigt sich hier auch deutlicher eine Sättigung bzw. sogar ein kontinuierlicher Leistungsabfall (s. die letzten drei Spalten) bei einigen Schülern.

In den nun folgenden tabellenartigen Einzelfallstudien wurden zur besseren Übersicht nur die fehlerhaften Schülerlösungen aufgeführt.

Einzelfallstudie Nr.1 ;Klasse A ;Punkte(VT/ST/NT): 14/20/14

Aufg. Nr.	VT	ST	NT
1	3-7=⌜	4-7=	3-8=
2	-8+3=	-7+3=-10	-6+4=-10
3	-7-4=	-8-5=	-7-5=-2
4	4-10+2=-12	5-11+2=-8	4-12+3=
5	$\frac{1}{2}$-3=⌜	$\frac{1}{2}$-4=	$\frac{1}{2}$-5=
6	0-5+3=-8	0-6+4=-10	0-7+5=-13
7	-1,5-0,3=-1,2	-1,4-0,3=-1,1	-1,5-0,4=-1,1
8	-2,1+0,4=-2,5	-2,2+0,6=-2,8	-2,2+0,4=-2,6
9	0-3-8=	0-4-9=+5	0-5-9=+4
10	-5+8=	-5+7=-12	-4+7=-11
11	(-3)-(-5)=⌜	(-2)-(-5)=	(-3)-(-4)=-7
12	(+3)-(+5)=⌜	(+2)-(+6)=	(+3)-(+7)=+4
13	(-4)-(+7)=+3	(-3)-(+7)=+4	(-5)-(+8)=+3
14	(-4)+(-3)=	(-5)+(-4)=	(-6)+(-4)=+2
15	2·(-3)=	3·(-5)=	2·(-4)=
16	(-4)·3=	(-6)·3=	(-5)·3=
17	(-5)·(-2)=-10	(-4)·(-2)=	(-4)·(-3)=
18	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)$=-1	$(-\frac{1}{3})\cdot(-3)$=	$(-\frac{1}{4})\cdot(-4)$= 5
19	$\frac{-6}{2}$ =	$\frac{-8}{2}$ =	$\frac{-6}{3}$ =
20	(-8):4=	(-10):5=	(-9):3=
21	5:(-10)=	4:(-8)=	6:(-12)=
22	$\frac{-12}{-4}$ =-48	$\frac{-15}{-3}$ =	$\frac{-16}{-4}$ =
23	-17<-14 f.	-19<-16	-18<-15
24	+11>-13	+12>-15	+12>-14
25	+12<+16	+11<+14	+11<+16
26	0>-15⌜	0>-13	0>-17
27	von einer Zahl 12 abziehen; bis 12	Schulden, Temperatur	Schulden, Temperatur, Subtrahend (operat. Aspekt)
28	5+3=8 5-3=2 (operat. Aspekt)	-4<0 +4>0	+5>-5 positive/negative Zahl

Gesamtbeurteilung: Die Fehlkonzepte bei der Multiplikation und Division werden größtenteils korrigiert. Bei der Addition und Subtraktion mit Klammern scheinen sich teilweise die Fehlkonzepte aus den anderen Aufgaben zu übertragen. Die verbreiteten Fehlkonzepte bei Addition und Subtraktion werden im Verlauf des Lernprozesses noch verstärkt.

Einzelfallstudie Nr. 2 ;Klasse A ;Punkte(VT/ST/NT): 18/27/17

Aufg. Nr.	VT	ST	NT
1	3-7=	4-7=	3-8=
2	-8+3=	-7+3=	-6+4= -10
3	-7-4=	-8-5=	-7-5= -2
4	4-10+2=	5-11+2=	4-12+3= -9
5	$\frac{1}{2}$-3=	$\frac{1}{2}$-4=	$\frac{1}{2}$-5=
6	0-5+3=	0-6+4=	0-7+5= -12
7	-1,5-0,3=	-1,4-0,3=	-1,5-0,4= -1,1
8	-2,1+0,4=	-2,2+0,6=	-2,2+0,4= -2,6
9	0-3-8=	0-4-9=	0-5-9= +4
10	-5+8=	-5+7=	-4+7= -11
11	(-3)-(-5)= -2	(-2)-(-5)=	(-3)-(-4)=
12	(+3)-(+5)=	(+2)-(+6)=	(+3)-(+7)=
13	(-4)-(+7)= ⌐	(-3)-(+7)=	(-5)-(+8)=
14	(-4)+(-3)=	(-5)+(-4)=	(-6)+(-4)= -2
15	2·(-3)= +4	3·(-5)=	2·(-4)=
16	(-4)·3= +8	(-6)·3=	(-5)·3=
17	(-5)·(-2)= +30	(-4)·(-2)=	(-4)·(-3)=
18	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)$= -1	$(-\frac{1}{3})\cdot(-3)$=	$(-\frac{1}{4})\cdot(-4)$= $+\frac{1}{16}$
19	$\frac{-6}{2}$ = -2	$\frac{-8}{2}$ =	$\frac{-6}{3}$ =
20	(-8):4= -0,5	(-10):5=	(-9):3=
21	5:(-10)= ⌐	4:(-8)=	6:(-12)=
22	$\frac{-12}{-4}$ = -3	$\frac{-15}{-3}$ =-5	$\frac{-16}{-4}$ =
23	-17 < -14	-19 < -16	-18 < -15
24	+11 > -13	+12 > -15	+12 > -14
25	+12 < +16	+11 < +14	+11 < +16
26	0 > -15	0 > -13	0 > -17
27	Eine Zahl von 0 abgezogen	Zahlengerade Thermometer	Zahlengerade Thermometer
28	über/unter 0	über/unter 0	über/unter 0 Thermometer

Gesamtbeurteilung: Die anfänglichen Fehlkonzepte bei Multiplikation und Division werden aufgegeben. Neue (insgesamt verbreitete) Fehlkonzepte werden für die Addition und Subtraktion aufgebaut, nachdem die Lerneinheit abgeschlossen ist ("Lern"effekt über Mitschüler?).

Einzelfallstudie Nr.3 ;Klasse C ;Punkte(VT/ST/NT): 10/24/11

Aufg. Nr.	VT	ST	NT
1	3-7=	4-7=	3-8=
2	-8+3=-11	-7+3=	-6+4=-10
3	-7-4=-3	-8-5=	-7-5=
4	4-10+2=-7	5-11+2=	4-12+3=-11
5	$\frac{1}{2}$-3=	$\frac{1}{2}$-4=	$\frac{1}{2}$-5=
6	0-5+3=-8	0-6+4=-2	0-7+5=
7	-1,5-0,3=-1.2	-1,4-0,3=-1,1	-1,5-0,4=-1,1
8	-2,1+0,4=-2,5	-2,2+0,6=-2,8	-2,2+0,4=-2,6
9	0-3-8=+5	0-4-9=	0-5-9=+4
10	-5+8=-13	-5+7=	-4+7=-11
11	(-3)-(-5)=	(-2)-(-5)=	~~(-3)-(-4)=-12~~
12	(+3)-(+5)=	(+2)-(+6)=	(+3)-(+7)=
13	(-4)-(+7)=	(-3)-(+7)=	(-5)-(+8)=+3
14	(-4)+(-3)=	(-5)+(-4)=	(-6)+(-4)=-2
15	2·(-3)=	3·(-5)=	2·(-4)=+8
16	(-4)·3=	(-6)·3=	(-5)·3=
17	(-5)·(-2)=	(-4)·(-2)=	(-4)·(-3)=
18	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)$=	$(-\frac{1}{3})\cdot(-3)$=	$(-\frac{1}{4})\cdot(-4)$=
19	$\frac{-6}{2}$ =	$\frac{-8}{2}$ =	$\frac{-6}{3}$ =
20	(-8):4=	(-10):5=	(-9):3=
21	5:(-10)=	4:(-8)=	6:(-12)=
22	$\frac{-12}{-4}$ =	$\frac{-15}{-3}$ =	$\frac{-16}{-4}$ =
23	-17<-14	-19<-16	-18<-15
24	+11>-13	+12>-15	+12>-14
25	+12<+16	+11<+14	+11<+16
26	0>-15	0>-13	0>-17
27	12 Zahlen unter 0	unter Null	unter Null
28	über/unter Null +3...wird größer -3...wird kleiner	Zahlengerade über/unter Null	kleiner/größer als Null Zahlengerade

Gesamtbeurteilung: Im NT brechen nach vorläufiger notdürftiger Retusche die Additions- und Subtraktions-Konzepte des VTs wie durch. Die Addition und Subtraktion mit Klammern sowie die Multiplikation und Division wird im ST perfekt beherrscht, jedoch bald wieder verlernt. Im NT scheinen sich die Fehlkonzepte von den Additions- und Subtraktions-Aufgaben ohne Klammern teilweise auf die Additions- und Subtraktions-Aufgaben mit Klammern zu übertragen.

Einzelfallstudie Nr. 4 ;Klasse C ;Punkte(VT/ST/NT): 11/23/15

Aufg. Nr.	VT	ST	NT
1	3-7= 5	4-7=	3-8=
2	-8+3=	-7+3=	-6+4= -10
3	-7-4=	-8-5=	-7-5= -2
4	4-10+2= 8	5-11+2=	4-12+3=
5	$\frac{1}{2}$-3= $2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$-4=	$\frac{1}{2}$-5=
6	0-5+3= 8	0-6+4=	0-7+5= -13
7	-1,5-0,3= ⌐	-1,4-0,3=	-1,5-0,4= -1,1
8	-2,1+0,4= -2,5	-2,2+0,6= -1,4	-2,2+0,4= -2,6
9	0-3-8= 5	0-4-9=	0-5-9= 4
10	-5+8=	-5+7=	-4+7= -11
11	(-3)-(-5)= -8	(-2)-(-5)=	(-3)-(-4)=
12	(+3)-(+5)=2	(+2)-(+6)=	(+3)-(+7)=
13	(-4)-(+7)= ⌐	(-3)-(+7)= -4	(-5)-(+8)=3
14	(-4)+(-3)=	(-5)+(-4)=	(-6)+(-4)= -2
15	2·(-3)=	3·(-5)=	2·(-4)=
16	(-4)·3=	(-6)·3=	(-5)·3=
17	(-5)·(-2)= -10	(-4)·(-2)=	(-4)·(-3)=
18	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)$= ⌐	$(-\frac{1}{3})\cdot(-3)$= ⌐	$(-\frac{1}{4})\cdot(-4)$= ⌐
19	$\frac{-6}{2}$ = ⌐	$\frac{-8}{2}$ =	$\frac{-6}{3}$ = ⌐
20	(-8):4= -16	(-10):5=	(-9):3=
21	5:(-10)= ⌐	4:(-8)= -2	6:(-12)= -2
22	$\frac{-12}{-4}$ = ⌐	$\frac{-15}{-3}$ =	$\frac{-16}{-4}$ =
23	-17 < -14	-19 < -16	-18 < -15
24	+11 > -13	+12 > -15	+12 > -14
25	+12 < +16	+11 < +14	+11 < +16
26	0 > -15	0 > -13	0 > -17
27	Thermometer 36-24=-12 *) 24-36=12	negative Zahl Rechenzeichen "-"	Thermometer
28	6-9=3 9-6=-3 (s.o.)	Zahlengerade	Zahlengerade

Gesamtbeurteilung: Die im VT erst in Ansätzen vorhandenen verbreiteten Fehlkonzepte bei Addition und Subtraktion stabilisieren und erweitern sich im NT. Auch das vorherrschende Fehlkonzept bei der Division durch eine negative ganze Zahl bleibt bestehen. Die Multiplikation mit Brüchen wird scheinbar durchgängig nicht beherrscht.

*) von rechts nach links gerechnet

Einzelfallstudie Nr.5 ;Klasse C ;Punkte(VT/ST/NT): 14/25/17

Aufg. Nr.	VT	ST	NT
1	3-7=	4-7=	3-8=
2	-8+3=	-7+3=	-6+4=-10
3	-7-4=	-8-5=	-7-5=-2
4	4-10+2=-8	5-11+2=	4-12+3=-11
5	$\frac{1}{2}$-3=	$\frac{1}{2}$-4=-1	$\frac{1}{2}$-5=
6	0-5+3=	0-6+4=	0-7+5=-12
7	-1,5-0,3=⌐	-1,4-0,3=	-1,5-0,4=-1,1
8	-2,1+0,4=⌐	-2,2+0,6=	-2,2+0,4=-2,6
9	0-3-8=	0-4-9=	0-5-9=+4
10	-5+8=	-5+7=	-4+7=-11
11	(-3)-(-5)=-8	(-2)-(-5)=-7	(-3)-(-4)=-7
12	(+3)-(+5)=	(+2)-(+6)=	(+3)-(+7)=
13	(-4)-(+7)=	(-3)-(+7)=	(-5)-(+8)=+3
14	(-4)+(-3)=⌐	(-5)+(-4)=-1	(-6)+(-4)=-2
15	2·(-3)=⌐	3·(-5)=	2·(-4)=
16	(-4)·3=⌐	(-6)·3=	(-5)·3=
17	(-5)·(-2)=⌐	(-4)·(-2)=	(-4)·(-3)=
18	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)$=⌐	$(-\frac{1}{3})\cdot(-3)$=	$(-\frac{1}{4})\cdot(-4)$=
19	$\frac{-6}{2}$ =⌐	$\frac{-8}{2}$ =	$\frac{-6}{3}$ =
20	(-8):4=⌐	(-10):5=	(-9):3=
21	5:(-10)=⌐	4:(-8)=	6:(-12)=
22	$\frac{-12}{-4}$ =⌐	$\frac{-15}{-3}$ =	$\frac{-16}{-4}$ =
23	-17 < -14	-19 < -16	-18 < -15
24	+11 > -13	+12 > -15	+12 > -14
25	+12 < +16	+11 < +14	+11 < +16
26	0 > -15	0 > -13	0 > -17
27	Zahl unter 0	Zahl unter 0 Zahlengerade	Zahl unter 0 Thermometer
28	Unterschied zwischen +3 und -3 ist 6.	s. VT	s. VT Zahlengerade

Gesamtbeurteilung: Das bei Addition und Subtraktion verbreitete Fehlkonzept wird über alle drei Teststufen ausgebaut. Die ohne erkennbares Vorwissen dazukommende Multiplikation und Divisio wird scheinbar problemlos gelernt.

Einzelfallstudie Nr.6 ;KlasseD ;Punkte(VT/ST/NT):21/27/17

Aufg. Nr.	VT	ST	NT
1	3-7=	4-7=	3-8=
2	-8+3=	-7+3=	-6+4=-10
3	-7-4=-3	-8-5=	-7-5=-2
4	4-10+2=	5-11+2=	4-12+3=
5	$\frac{1}{2}$-3=	$\frac{1}{2}$-4=	$\frac{1}{2}$-5=
6	0-5+3=	0-6+4=	0-7+5=
7	-1,5-0,3=	-1,4-0,3=	-1,5-0,4=
8	-2,1+0,4=	-2,2+0,6=	-2,2+0,4=-2,6
9	0-3-8=	0-4-9=	0-5-9= 4
10	-5+8=	-5+7=	-4+7=
11	(-3)-(-5)= -8	(-2)-(-5)=	(-3)-(-4)=-7
12	(+3)-(+5)=	(+2)-(+6)=	(+3)-(+7)=
13	(-4)-(+7)=	(-3)-(+7)=	(-5)-(+8)=+3
14	(-4)+(-3)= -1	(-5)+(-4)=	(-6)+(-4)= -2
15	2·(-3)=	3·(-5)=	2·(-4)=
16	(-4)·3=	(-6)·3=	(-5)·3=
17	(-5)·(-2)= -10	(-4)·(-2)=	(-4)·(-3)=
18	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)$= -1	$(-\frac{1}{3})\cdot(-3)$=	$(-\frac{1}{4})\cdot(-4)$=
19	$\frac{-6}{2}$ =	$\frac{-8}{2}$ =	$\frac{-6}{3}$ =
20	(-8):4=	(-10):5=	(-9):3=
21	5:(-10)= ⌐	4:(-8)=-2	6:(-12)=
22	$\frac{-12}{-4}$ = +2	$\frac{-15}{-3}$ =	$\frac{-16}{-4}$ =
23	-17 < -14	-19 < -16	-18 < -15 f.(wahr-
24	+11 > -13	+12 > -15	+12 > -14 f. schein-
25	+12 < +16	+11 < +14	+11 < +16 f.Ver-
26	0 > -15	0 > -13	0 > -17 f. wechs-
27	12 unter 0 Zahlengerade	Schulden Zahlengerade	lung) Thermometer
28	Zahlengerade,Schulden,(+3)-(-3)=0 (falsches Gegenzahlkonzept)	s. 27	Unterschied zwischen +5 und -5 ist 10

Gesamtbeurteilung: Das verbreitete Fehlkonzept bei Addition und Subtraktion wird nach völligem Verschwinden nach dem VT im NT wieder angewandt und ausgebaut. Im VT erkennbare Fehlkonzepte bei der Multiplikation und Division werden dagegen nachhaltig korrigiert.

Einzelfallstudie Nr.7 ;KlasseA ;Punkte(VT/ST/NT):22/28/28

Aufg. Nr.	VT	ST	NT
1	3-7=	4-7=	3-8=
2	-8+3=	-7+3=	-6+4=
3	-7-4=	-8-5=	-7-5=
4	4-10+2=	5-11+2=	4-12+3=
5	$\frac{1}{2}$-3=	$\frac{1}{2}$-4=	$\frac{1}{2}$-5=
6	0-5+3=	0-6+4=	0-7+5=
7	-1,5-0,3=	-1,4-0,3=	-1,5-0,4=
8	-2,1+0,4=	-2,2+0,6=	-2,2+0,4=
9	0-3-8=	0-4-9=	0-5-9=
10	-5+8=	-5+7=	-4+7=
11	(-3)-(-5)= -8	(-2)-(-5)=	(-3)-(-4)=
12	(+3)-(+5)=	(+2)-(+6)=	(+3)-(+7)=
13	(-4)-(+7)= ⌐	(-3)-(+7)=	(-5)-(+8)=
14	(-4)+(-3)=	(-5)+(-4)=	(-6)+(-4)=
15	2·(-3)=	3·(-5)=	2·(-4)=
16	(-4)·3=	(-6)·3=	(-5)·3=
17	(-5)·(-2)= -10	(-4)·(-2)=	(-4)·(-3)=
18	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)$= -1	$(-\frac{1}{3})\cdot(-3)$=	$(-\frac{1}{4})\cdot(-4)$=
19	$\frac{-6}{2}$ =	$\frac{-8}{2}$ =	$\frac{-6}{3}$ =
20	(-8):4=	(-10):5=	(-9):3=
21	5:(-10)= ⌐	4:(-8)=	6:(-12)=
22	$\frac{-12}{-4}$ = -3	$\frac{-15}{-3}$ =	$\frac{-16}{-4}$ =
23	-17 < -14	-19 < -16	-18 < -15
24	+11 > -13	+12 > -15	+12 > -14
25	+12 < +16	+11 < +14	+11 < +16
26	0 > -15	0 > -13	0 > -17
27	Schulden	Schulden, Zahlengerade	s. ST
28	s.27	s.27	s.27

Gesamtbeurteilung: Sämtliche anfänglich erkennbaren Fehlkonz
te bei Subtraktion, Multiplikation und Division werden schei
bar problemlos und dauerhaft beseitigt. Die vom Schüler mit
negativen Zahlen assoziierten Modelle sind auffallend konst

Einzelfallstudie Nr.8 ;Klasse A ;Punkte(VT/ST/NT): 22/27/24

Aufg. Nr.	VT	ST	NT
1	3-7=	4-7=	3-8=
2	-8+3=	-7+3=	-6+4=
3	-7-4=	-8-5=	-7-5=
4	4-10+2=	5-11+2=4	4-12+3=
5	$\frac{1}{2}$-3=	$\frac{1}{2}$-4=	$\frac{1}{2}$-5=
6	0-5+3=	0-6+4=	0-7+5=
7	-1,5-0,3=	-1,4-0,3=	-1,5-0,4=
8	-2,1+0,4=	-2,2+0,6=	-2,2+0,4=
9	0-3-8=	0-4-9=	0-5-9=
10	-5+8=	-5+7=	-4+7=
11	(-3)-(-5)=-8	(-2)-(-5)=	(-3)-(-4)=
12	(+3)-(+5)=	(+2)-(+6)=	(+3)-(+7)=
13	(-4)-(+7)=+3	(-3)-(+7)=	(-5)-(+8)=
14	(-4)+(-3)=	(-5)+(-4)=	(-6)+(-4)=
15	2·(-3)=	3·(-5)=	2·(-4)=
16	(-4)·3=	(-6)·3=	(-5)·3=
17	(-5)·(-2)= -10	(-4)·(-2)=	(-4)·(-3)= -12
18	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)$= -1	$(-\frac{1}{3})\cdot(-3)$=	$(-\frac{1}{4})\cdot(-4)$= +4
19	$\frac{-6}{2}$ =	$\frac{-8}{2}$ =	$\frac{-6}{3}$ =
20	(-8):4=	(-10):5=	(-9):3=
21	5:(-10)= -2	4:(-8)=	6:(-12)= -2
22	$\frac{-12}{-4}$ = -3	$\frac{-15}{-3}$ =	$\frac{-16}{-4}$ = -4
23	-17 < -14	-19 < -16	-18 < -15
24	+11 > -13	+12 > -15	+12 > -14
25	+12 < +16	+11 < +14	+11 < +16
26	0 > -15	0 > -13	0 > -17
27	Schulden	Schulden, Thermometer	Schulden, Wasserstand
28	s.27	s.27	s.27

Gesamtbeurteilung: Fehlkonzepte bei der Subtraktion werden beseitigt, die Fehlkonzepte bei der Multiplikation und Division brechen nach vorläufiger Retusche wieder durch.

Einzelfallstudie Nr.9 ;Klasse B ;Punkte(VT/ST/NT): 22/28/28

Aufg. Nr.	VT	ST	NT
1	$3-7=$	$4-7=$	$3-8=$
2	$-8+3=$	$-7+3=$	$-6+4=$
3	$-7-4=$	$-8-5=$	$-7-5=$
4	$4-10+2=$	$5-11+2=$	$4-12+3=$
5	$\frac{1}{2}-3=$	$\frac{1}{2}-4=$	$\frac{1}{2}-5=$
6	$0-5+3=$	$0-6+4=$	$0-7+5=$
7	$-1,5-0,3=$	$-1,4-0,3=$	$-1,5-0,4=$
8	$-2,1+0,4=$	$-2,2+0,6=$	$-2,2+0,4=$
9	$0-3-8=$	$0-4-9=$	$0-5-9=$
10	$-5+8=$	$-5+7=$	$-4+7=$
11	$(-3)-(-5)=-8$	$(-2)-(-5)=$	$(-3)-(-4)=$
12	$(+3)-(+5)=$	$(+2)-(+6)=$	$(+3)-(+7)=$
13	$(-4)-(+7)=3$	$(-3)-(+7)=$	$(-5)-(+8)=$
14	$(-4)+(-3)=$	$(-5)+(-4)=$	$(-6)+(-4)=$
15	$2\cdot(-3)=$	$3\cdot(-5)=$	$2\cdot(-4)=$
16	$(-4)\cdot 3=$	$(-6)\cdot 3=$	$(-5)\cdot 3=$
17	$(-5)\cdot(-2)=-10$	$(-4)\cdot(-2)=$	$(-4)\cdot(-3)=$
18	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)=-1$	$(-\frac{1}{3})\cdot(-3)=$	$(-\frac{1}{4})\cdot(-4)=$
19	$\frac{-6}{2}=$	$\frac{-8}{2}=$	$\frac{-6}{3}=$
20	$(-8):4=$	$(-10):5=$	$(-9):3=$
21	$5:(-10)=$ ⌐	$4:(-8)=$	$6:(-12)=$
22	$\frac{-12}{-4}=-3$	$\frac{-15}{-3}=$	$\frac{-16}{-4}=$
23	$-17<-14$	$-19<-16$	$-18<-15$
24	$+11>-13$	$+12>-15$	$+12>-14$
25	$+12<+16$	$+11<+14$	$+11<+16$
26	$0>-15$	$0>-13$	$0>-17$
27	unter 0	Schulden	Schulden
28	s.27	s.27	s.27

Gesamtbeurteilung: Alle anfänglichen Fehlkonzepte werden problemlos und nachhaltig korrigiert (s.Nr.7).

Einzelfallstudie Nr.10;KlasseC ;Punkte(VT/ST/NT):26/27/28

Aufg. Nr.	VT	ST	NT
1	3-7=	4-7=-12	3-8=
2	-8+3=	-7+3=	-6+4=
3	-7-4=	-8-5=	-7-5=
4	4-10+2=	5-11+2=	4-12+3=
5	$\frac{1}{2}$-3=	$\frac{1}{2}$-4=	$\frac{1}{2}$-5=
6	0-5+3=	0-6+4=	0-7+5=
7	-1,5-0,3=	-1,4-0,3=	-1,5-0,4=
8	-2,1+0,4=	-2,2+0,6=	-2,2+0,4=
9	0-3-8=	0-4-9=	0-5-9=
10	-5+8=	-5+7=	-4+7=
11	(-3)-(-5)=	(-2)-(-5)=	(-3)-(-4)=
12	(+3)-(+5)=	(+2)-(+6)=	(+3)-(+7)=
13	(-4)-(+7)=	(-3)-(+7)=	(-5)-(+8)=
14	(-4)+(-3)=	(-5)+(-4)=	(-6)+(-4)=
15	2·(-3)=	3·(-5)=	2·(-4)=
16	(-4)·3=	(-6)·3=	(-5)·3=
17	(-5)·(-2)=	(-4)·(-2)=	(-4)·(-3)=
18	$(-\frac{1}{2})\cdot(-2)=$	$(-\frac{1}{3})\cdot(-3)=$	$(-\frac{1}{4})\cdot(-4)=$
19	$\frac{-6}{2}$ =	$\frac{-8}{2}$ =	$\frac{-6}{3}$ =
20	(-8):4= 2	(-10):5=	(-9):3=
21	5:(-10)=	4:(-8)=	6:(-12)=
22	$\frac{-12}{-4}$ =	$\frac{-15}{-3}$ =	$\frac{-16}{-4}$ =
23	-17 < -14	-19 < -16	-18 < -15
24	+11 > -13	+12 > -15	+12 > -14
25	+12 < +16	+11 < +14	+11 < +16
26	0 > -15	0 > -13	0 > -17
27	Schulden	Schulden, Wasserstand	Schulden
28	⌜	s. 27	s. 27

Gesamtbeurteilung: Für diesen Schüler war der Unterricht (nahezu) überflüssig.

Lebenslauf

23.4.1951	geboren in Mülheim a.d.Ruhr als Sohn des Josef Strunck und seiner Ehefrau Gertrud, geb. Denneßen
1957-1961	Grundschule in Mülheim a.d.Ruhr
1961-1964	Städtisches Gymnasium in Mülheim a.d.Ruhr
1964-1969	Kaiserin-Friedrich-Schule in Bad Homburg
25.6.1969	Abitur
1969-1975	Studium der Matnematik, Physik, Erziehungswissenschaften und Politik an der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität in Frankfurt am Main
5.6.1975	Erstes Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien in den Fächern Mathematik und Physik
1975-1977	Referendariat an der Gesamtschule Oberursel
25.11.1976	Zweites Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien in den Fächern Mathematik und Physik
seit 1977	Studienrat an der Augustinerschule in Friedberg. Aufbaustudium in Erziehungswissenschaften.
12.5.1982	Erweiterungsprüfung für das Lehramt an Gymnasien im Fach Erziehungswissenschaften

Druck und Verarbeitung: copy shop, darmstadt, tel. 21353